DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

PATRONES Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA GENERALIZACIÓN

Trabajo Fin de Máster que presenta

EDUARDO MERINO CORTÉS

Dirigido por las doctoras

Dª. MARIA CONSUELO CAÑADAS

Dª. MARTA MOLINA

GRANADA, 2012

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

PATRONES Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA GENERALIZACIÓN

Trabajo Fin de Máster presentado por
D. Eduardo Merino Cortés
para la obtención del título
Máster en Didáctica de la Matemática

Tutoras:
Dª. María Consuelo Cañadas Dª. Marta Molina

GRANADA, 2012

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

El estudio aquí presentado es un Trabajo de Fin de Máster realizado durante el curso académico 2011-2012 dentro del programa de Máster Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada, por el alumno Eduardo Merino Cortés, bajo la dirección de las doctoras Dª. María Consuelo Cañadas y Dª. Marta Molina. Este trabajo se desarrolla dentro del Proyecto de Investigación I+D+i EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en Educación Matemática" y dentro del grupo de investigación FQM-193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico".

En este trabajo indagamos en el pensamiento algebraico de un grupo de alumnos[1] de quinto curso de educación primaria (10-11 años). Para ello, los alumnos participantes en el estudio respondieron una prueba escrita elaborada por los investigadores[2]. En este informe analizamos las producciones de los estudiantes en dicha prueba, atendiendo a la capacidad de generalización que muestran, al uso de patrones para llegar a generalizar y al tipo de representaciones que utilizan (verbales, tabulares, pictóricas, simbólicas, entre otras).

Antes de la recogida de datos, llevamos a cabo dos estudios piloto, con el objetivo de mejorar sucesivos diseños de la prueba hasta llegar a la versión definitiva. Realizamos el primero de ellos con los compañeros matriculados en la asignatura Pensamiento Numérico II del máster de Didáctica de la Matemática, durante el curso académico 2011-2012, en una de las sesiones habituales de clase. El objetivo de este estudio piloto era obtener ideas y opiniones sobre el trabajo, y sobre la adecuación y dificultad de la prueba diseñada, conocidos el problema de investigación y los sujetos participantes en el estudio. Realizamos el segundo estudio piloto con una niña y un niño de 5º de educación primaria, con el objetivo de obtener información sobre la dificultad de las preguntas planteadas en la prueba, el grado de entendimiento de estas, la introducción necesaria previa a la prueba y el tiempo necesario para la realización de la

[1] En esta memoria se usará el género masculino al hacer referencia a un número plural de estudiantes, sin precisar su género.

[2] Doctorando (Eduardo Merino Cortés) y Directoras del trabajo (Dra. Mª Consuelo Cañadas y Dra. Marta Molina).

misma. Esta información fue útil para el diseño definitivo de la prueba y de la recogida de datos. Estos estudios también sirvieron para familiarizarnos con la recogida de datos y prever posibles resultados de la misma en el estudio final.

En la recogida de datos definitiva participaron 20 estudiantes de un mismo grupo que cursaban quinto de educación primaria en un colegio privado de Málaga en el curso académico 2011-2012. La versión definitiva de la prueba consta de 10 cuestiones referidas a una situación inicial descrita verbalmente e introducida mediante una representación pictórica que constituye un ejemplo genérico[3]. Las cuestiones tratan sobre patrones y relaciones funcionales que se pueden establecer entre los valores de variables involucradas en la situación. En todas las cuestiones se insiste en que los alumnos aporten explicaciones a sus respuestas para obtener más información sobre la forma en que las abordan. Llevamos a cabo la recogida de información durante una clase de matemáticas de 50 minutos de duración. Los datos empíricos utilizados en este trabajo son las producciones escritas de los estudiantes en dicha prueba.

ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Organizamos la memoria de investigación en seis capítulos.

En el primero justificamos el interés del estudio e introducimos el problema de investigación, ofreciendo una justificación personal, curricular e investigadora para la realización de este trabajo.

En el segundo capítulo describimos el marco teórico que sustenta el trabajo, enmarcándolo en relación a estudios previos relacionados con el problema de investigación planteado. En esta parte de la memoria precisamos el significado de los términos clave y detallamos el estado de la cuestión.

En el tercer capítulo incluimos los objetivos de investigación. En primer lugar describimos el objetivo general, y tras él, los objetivos específicos.

Tratamos el marco metodológico en el cuarto capítulo. Describimos los estudios piloto llevados a cabo y sus implicaciones para el estudio definitivo, los sujetos, el

[3] Balacheff (2000) define el ejemplo genérico como el caso en que se dan procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Presentaremos más información a cerca de este término en el marco teórico de este trabajo.

instrumento para la recogida de información y las categorías que tenemos en cuenta en el análisis de datos.

En el capítulo quinto presentamos el análisis de datos realizado y los resultados obtenidos.

En el capítulo sexto discutimos los resultados obtenidos.

En el séptimo y último capítulo incluimos las conclusiones de esta investigación. En él recogemos un resumen de la aportación de este trabajo a los objetivos de investigación, las limitaciones identificadas y las posibles vías de continuación que serán consideradas para la posterior realización de una Tesis Doctoral en esta línea de investigación.

Acompañando a esta memoria presentamos varios anexos en los que recogemos: (a) la versión final de la tarea que fue utilizada para la recogida de datos, (b) la versión provisional 1 de la tarea, (c) la versión provisional 2 de la tarea, (d) la versión provisional 3 de la tarea, (e) las producciones de los alumnos en el estudio piloto 2, y (f) las producciones de los alumnos en el estudio definitivo.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo detallamos el problema a investigar así como su justificación en los contextos personal, curricular e investigador.

El problema de investigación se encuadra dentro de la propuesta Early-Algebra. Como parte de esta propuesta, nuestro foco de interés es la capacidad de generalización de un grupo de alumnos de 5º de educación primaria. Prestamos atención a las representaciones y patrones utilizados en varias cuestiones que conducen al desarrollo de procesos de generalización.

JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El problema de investigación surge de tres contextos diferentes pero complementarios: (a) personal, (b) curricular y (c) investigador. Los describimos a continuación. .

Justificación personal

Expongo a continuación las razones personales que mueven al investigador a interesarse por el problema de investigación.

Antes de iniciar el Máster en Didáctica de las Matemáticas en el curso 2011/2012, obtuve el título de Maestro en Educación Primaria, titulación en la que cursé varias asignaturas relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas. Esta formación previa, sumada a un gusto por las matemáticas bien definido desde una edad muy temprana, me motivó personalmente a realizar este máster y, por ende, el trabajo sobre el que versa el presente documento. En particular, el campo del álgebra siempre ha sido el que más interés me ha despertado dentro de las Matemáticas y por eso decidí trabajar con el grupo "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. Tras las sesiones de clase de los distintos cursos del máster, decidí enfocar mi trabajo hacia el estudio del pensamiento algebraico de alumnos de educación primaria, interés que se enmarca dentro del campo conocido como Early-Algebra, en el que profundizaremos más adelante en esta memoria.

Tras la lectura de diversos documentos, algunos de ellos enmarcados dentro del grupo de investigación en el que se desarrolla este trabajo, y teniendo en cuenta la línea de investigación en la que vienen trabajando mis tutoras, acordamos profundizar sobre la generalización, los patrones y las representaciones que utilizan estudiantes de 5º de primaria en una tarea de generalización con ejemplo genérico.

Sin duda, la realización de este trabajo constituye para mí un reto tanto a nivel personal como profesional y, sobre todo, una oportunidad para satisfacer mi interés por conocer las capacidades algebraicas de estudiantes de educación primaria, aportando un granito de arena a un campo apasionante como el de la investigación educativa.

Justificación curricular

En relación con el tema que abordamos en este trabajo, los documentos curriculares vigentes para la educación primaria en España (Boletín Oficial del Estado, 2006) destaca el área de Matemáticas como instrumental básica.

Así, el anexo I del Real Decreto 1513/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la etapa, recoge la competencia matemática como una de las competencias básicas que los alumnos han de desarrollar. Esta competencia contempla la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión matemática, e implica el uso de procesos de razonamiento, de pensamiento y la validación de resultados (Boletín oficial del Estado, 2006).

El anexo II del mismo documento expone los bloques de contenidos de matemáticas. Entre ellos números y operaciones" pretende, esencialmente, desarrollar el sentido numérico (Boletín oficial del Estado, 2006).

Podemos observar que, aunque no haya una alusión específica a los contenidos relacionados con el álgebra en educación primaria, desde los documentos oficiales que regulan la etapa se establece cierta disposición para la resolución de problemas. Este razonamiento, unido a conocimientos relativos a patrones, regularidades, estructuras o lenguaje algebraico, será un componente fundamental del pensamiento algebraico.

Las razones que impulsan esta investigación pueden asimilarse a las consideraciones de las que se nutre la propuesta Early-Algebra. En ese sentido, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) argumenta que el álgebra ha de ser tratada desde la educación infantil en adelante. La intención es ayudar a los alumnos a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior" (2000, p. 37). Como hemos visto, esta propuesta no está incluida en el currículo español, al contrario de lo que ocurre en países como Australia, China, Corea o Portugal, cuyos currículos sí están "algebrizados" (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011; Ali y Alsayed, 2010; Molina, 2011).

Por ejemplo, el currículo australiano marca como objetivo en matemáticas que los niños "desarrollen un creciente y sofisticado conocimiento sobre los conceptos matemáticos y fluidez en los procesos, y sean capaces de proponer y resolver problemas y razonar con números y álgebra, medidas y geometría, y estadística y probabilidad" desde la educación infantil (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011).

En el caso de Portugal, según indican Canavarro (2009) y Pimentel (2010), tras la reforma del currículo de matemáticas para la enseñanza básica en 2007, el álgebra aparece recogida en primer ciclo de la educación básica (6-9 años) como forma de pensamiento matemático. Proponen el trabajo con secuencias, relaciones entre números y entre número y operaciones, para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico (Molina, 2011). En el segundo ciclo de educación básica (10-12 años) se continúa en esta línea recomendándose el trabajo con patrones y relaciones con el mismo objetivo.

Beberly (2004, citado por Ali y Alsayed, 2010) señala que el currículo matemático en educación primaria en Corea se centra en el desarrollo de seis habilidades: generalización, abstracción, análisis, dinamismo, modelización y organización. Por otra parte, este currículo se marca como meta global en el álgebra el entendimiento de relaciones cuantitativas y como metas particulares el trabajo con las ecuaciones, las variables y las funciones.

De lo expuestos en los documentos curriculares en estos países, podemos concluir que todos ponen de manifiesto la importancia de introducir el álgebra en edades tempranas, a través de tareas relacionadas con la generalización.

Justificación investigadora

Si cuestionamos a alguien ajeno al campo del pensamiento numérico sobre la posibilidad de introducir contenido algebraico en educación primaria o en educación infantil, es posible que la respuesta fuera una negación. A priori, esos contenidos pueden considerarse "demasiado avanzados" o "difíciles" para alumnos de esas edades. Sin embargo, estudios recientes argumentan que el pensamiento algebraico desde edades tempranas pueden favorecer el desarrollo de conceptos matemáticos complejos (Blanton y Kaput, 2005). Unas matemáticas elementales "algebrizadas" pueden promover en los alumnos, un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentar su capacidad de expresar generalidad (Molina, 2009).

Las ideas expuestas son algunas de las que conforman la base de la propuesta curricular denominada Early-Algebra. Esta propuesta consiste en la "algebrización del currículo" (Kaput, 2000) y sugiere promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, para ello, recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan o argumenten (Blanton y Kaput, 2005). En ese sentido, cabe destacar estudios recientes como el que actualmente llevan a cabo Blanton y Brizuela, que llegan a trabajar el desarrollo del pensamiento algebraico con alumnos de la etapa de educación infantil (Pappano, 2012).

Junto a todo lo anterior, hay que considerar que las investigaciones sobre el Early-Algebra se empezaron a realizar en la década de los 90. Se trata de una propuesta en proceso de crecimiento y, desde este trabajo, queremos realizar una pequeña aportación con el planteamiento de un problema que se adecúa a la estructura y extensión de un trabajo fin de máster, dejando abiertas posibles líneas de investigación para un futuro.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos el marco teórico de la presente investigación, organizado en torno a los siguientes términos clave: Early-Algebra, pensamiento funcional, patrones, generalización y representaciones. La información que presentamos permite precisar el significado de los términos que se utilizan y ubicar nuestra investigación dentro del contexto en el que enmarca. También describimos el estado de la cuestión en relación con el problema de investigación que abordamos, sintetizando los resultados de los principales estudios previos consultados.

EARLY-ALGEBRA. PENSAMIENTO FUNCIONAL

Presentamos en este apartado la propuesta Early-Algebra. En primer lugar, centramos el discurso en la concepción del álgebra escolar para, más adelante, definir la propuesta Early-Algebra y su motivación. Dentro de la misma centramos la atención en el pensamiento funcional y atendemos a su desarrollo en edades tempranas.

Álgebra escolar y Early-Álgebra

Bednarz, Kieran y Lee (1996, citado por Molina, 2011) distinguen cinco concepciones diferentes sobre el álgebra: "la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de funciones" (p. 29). Por su parte, Usiskin (1999) presenta cuatro concepciones del álgebra escolar: (a) álgebra como aritmética generalizada, (b) algebra como un estudio de procedimientos para resolver cierto tipo de problemas, (c) álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y (d) álgebra como el estudio de estructuras. Aunque el segundo autor vincula el álgebra al uso del simbolismo algebraico, en ambas concepciones se destacan los patrones (aritméticos y geométricos), la generalización, la resolución de problemas, las cantidades, las funciones y la modelización, como componentes del álgebra que se identifican con el álgebra escolar. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) identifican diferentes "raíces" del álgebra, entre las que figura la generalización.

Autores como Kieran (1996, 2004) y Blanton, Levi, Crites y Dougherty (en prensa) presentan concepciones similares del álgebra al destacar como actividades algebraicas el análisis de relaciones entre cantidades y de estructuras, el estudio del cambio o pensamiento funcional, la generalización, la resolución de problemas, las ecuaciones, la justificación y la predicción.

Drijvers (2011) señala que "el trato del álgebra en la escuela atiende a varios objetivos: ayuda a preparar a los estudiantes para próximos cursos, desempeño profesional y roles sociales futuros, y tiene un valor educativo general" (p. 24). Desde la amplia visión del álgebra escolar mencionada se insiste en que los estudiantes aprendan a realizar generalizaciones a partir de patrones. Para que los estudiantes comprendan el significado de las leyes algebraicas se les introduce en el establecimiento de relaciones entre nociones y significados a través de actividades en diferentes contextos (Carraher, Martínez y Schliemann, 2007).

Otros enfoques teóricos como por ejemplo el ontosemiótico, ofrecen una perspectiva del álgebra temprana basándose en otros aspectos que aquí no abordaremos (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2011).

Por su parte, los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) también aportan una visión multidimensional del álgebra, distinguiendo como componentes de la misma: la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, representación de relaciones matemáticas, análisis de situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos, uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio. Además, recomiendan que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde la educación infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior" (p. 37).

Esta recomendación es acorde con la propuesta conocida como Early-Algebra que plantea la introducción de modos de pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos escolares (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Kaput, 2000; Molina, 2009). De las matemáticas propias de la educación primaria pueden emerger naturalmente diferentes modos de pensamiento algebraico, que tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar (Blanton y Kaput, 2005). Los autores que abordan esta propuesta tales como Kaput (1998, 2000) y Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth, et al. (2003, citados por Molina, 2009) adoptan una visión del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones.

Motivación de la propuesta Early-algebra

Como indican Carraher, Schliemann y Brizuela (2006), la enseñanza del álgebra ha estado tradicionalmente pospuesta hasta la adolescencia por razones históricas. Presunciones sobre el desarrollo psicológico de los discentes así como investigaciones que documentaban las usuales dificultades que los adolescentes tienen con el álgebra apoyaban el retraso en la inclusión del álgebra en el currículo. Muchos autores han argumentado que los niños en edad temprana son incapaces de aprender álgebra porque no tienen la capacidad cognitiva suficiente para manipular conceptos como las variables y las funciones. Sin embargo, como destaca Molina (2009), en las dos últimas décadas se han realizado investigaciones que tratan la integración del álgebra en el currículo de educación primaria.

Blanton y Kaput (2005), Freiman y Lee (2004), Kaput (1998, 2000) y Lins y Kaput (2004) señalan que la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de esta sub-área de las matemáticas y la preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes han conducido a nuevas formas de abordar su enseñanza. Además, según estos autores, el reconocimiento reciente de que los niños desde edades tempranas pueden hacer mucho más de lo que se les suponía previamente, ha dado lugar a esta propuesta. Se ha constatado así, que los niños necesitan de un periodo prolongado de tiempo para desarrollar los diferentes modos de pensamiento involucrados en las tareas algebraicas, así como nuevos conceptos o significados propios de las mismas

En ese sentido, investigadores y estudios empíricos de la última década han analizado la introducción de algunas ideas algebraicas en edades tempranas. Los resultados obtenidos han fomentado que los documentos curriculares de países como

Australia, China, Corea o Portugal incluyan esta propuesta Early-Algebra, como ya hemos señalado previamente.

Diferenciamos el Early-Algebra de lo que se denomina álgebra temprana. La primera tiene objetivos más ambiciosos, considerando que las dificultades que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del álgebra son debidas al modo en que las matemáticas elementales son introducidas y trabajadas (Carraher y Schliemann, 2007).

Pensamiento funcional

En las funciones se establecen relaciones entre variables. Las relaciones entre dos o más variables en una función son de dependencia. Los valores de la primera variable (variable dependiente) varían según los valores de la segunda (variable independiente).

Blanton y Kaput (2004) definen el pensamiento funcional, con base en la caracterización de Smith (2003), como: "pensamiento representacional que se focaliza en la relación entre dos o más cantidades variables" (p. 135). Por otra parte, consideran las funciones como "los sistemas representacionales inventados o adaptados por niños para representar una generalización o una relación entre cantidades" (p. 135).

Rico (2007) considera que el pensamiento funcional es el acto de pensar en términos de y acerca de relaciones, y es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Este autor argumenta que esas relaciones pueden representarse mediante distintos tipos de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos.

Blanton, Levi, Crites y Dougherty (en prensa) definen el pensamiento funcional como el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. Esto incluye la generalización de relaciones entre cantidades covariantes, representar esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, el simbolismo algebraico, tablas o gráficos; y razonar de forma fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones.

Tradicionalmente el estudio de funciones ha estado retrasado hasta su tratamiento conjunto con el álgebra de la educación secundaria. Investigaciones recientes indican que los estudiantes son capaces de presentar un pensamiento funcional en edades más tempranas de las que a priori les corresponderían. Los datos sugieren que los estudiantes pueden alcanzar este tipo de pensamiento incluso desde la educación infantil (Blanton y

Kaput, 2004). Estos autores proponen que los currículos de educación primaria deberían incluir el pensamiento funcional y se preocupan por la puesta en práctica del mismo en el aula (Blanton y Kaput, 2011). Estudian cómo los materiales didácticos y las actividades escolares pueden llevarse a cabo para promover el pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2011). La capacidad demostrada para el desarrollo del pensamiento funcional en los alumnos de edades tempranas potencia la viabilidad de la propuesta de que este pensamiento sea nutrido por el currículo y por la enseñanza.

PATRONES

La Real Academia Española (RAE) (2001), entre otras, ofrece la siguiente definición de patrón que podemos tener en cuenta para nuestro estudio: "9. m. Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual".

Castro, Cañadas y Molina (2010) definen el patrón (o pauta) como: "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (p. 57).

Cañadas y Castro (2007) apuntan que los patrones matemáticos están relacionados con una regla general, no solo con casos particulares. Los estudiantes se basan en una conjetura que es cierta para casos particulares, y han de validarla para nuevos casos, para deducir que la conjetura es cierta en general.

La relación entre patrones y generalización ha sido reconocida por diversos autores. Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La idea básica de la noción de patrón es que surgen a partir de la repetición de una situación con regularidad (Stacey, 1989). Kaput (1999) presenta la idea de patrón y estructura cuando se refiere a la generalización del siguiente modo:

> *extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos* (p. 136).

El uso de patrones es uno de los caminos para promover el pensamiento algebraico y enseñar a generalizar a los alumnos (NCTM, 2000). Castro (1995) señala que trabajos como el de Stacey (1989) "destacan la importancia de proponer trabajos sistemáticos con patrones a los escolares y el interés de que estos trabajos sean parte integrante del currículo de Matemáticas" (p. 27).

Por otra parte, los patrones también pueden ser analizados desde el punto de vista de las representaciones. Así, Moss y London (2011) señalan que cuando se priorizan las representaciones visuales, y se ayuda a los estudiantes a focalizarse en los patrones como un camino para discernir reglas generales, están mejor capacitados para encontrar, expresar y justificar reglas funcionales.

REPRESENTACIONES

El término representación goza de múltiples significados según el campo en que se utilice, por lo que es importante determinar qué entenderemos por representación en nuestro trabajo.

Según el la RAE (2001), podemos destacar como aplicables al campo de la Didáctica de las Matemáticas las siguientes: "1. f. Acción y efecto de representar (…) 3. f. Figura, imagen o idea que sustituye a la realidad (…) 5. f. Cosa que representa otra (…) 7. f. Psicol. Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior (…) 1. f. Mat. Figura con que se expresa la relación entre diversas magnitudes".

Fernández (1997, citado por Espinosa, 2005) define la representación como "el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático" (p. 2).

Rico (2009) subraya que la representación se basa en la dupla representante-representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente a lo que la representación sustituye. El mismo autor identifica las representaciones como "todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (p. 3).

Como se puede observar, todas las definiciones presentadas son acordes entre sí y encierran tras ellas un complejo campo de estudio. Existe un acuerdo en hacer una distinción entre representaciones internas y representaciones externas.

Goldin y Kaput (1996) consideran que las representaciones internas son las configuraciones que no son directamente observables, pero que se pueden inferir a través de lo que se dice o se hace. Las representaciones externas son las configuraciones observables tales como las palabras, gráficos, dibujos, etc. que representan cuestiones que son accesibles a la observación.

Castro y Castro (1997) distinguen entre representaciones internas como imágenes mentales, y representaciones externas como las que tienen una traza o soporte físico tangible.

Duval (1999) define como representación externa la producida como tal por un sujeto o sistema, que se efectúa a través de un sistema semiótico y es accesible a todos quienes conocen dicho sistema. Por otro lado, describe la representación interna como aquella que pertenece a un sujeto y que no es comunicada a otro a través de la producción de una representación externa. Como plantea el mismo Duval, las representaciones externas no tienen como única función la comunicación sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática, la cuál depende directamente del tipo de representación utilizada. Este autor destaca la importancia de trabajar con varias representaciones ligadas a un mismo objeto, ya que esa diversificación, ayudará potencialmente a la comprensión del objeto estudiado.

Cucoo (2001) define las representaciones externas como las que nos permiten comunicamos fácilmente con otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones. Este autor define las representaciones internas como las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

Martínez (2006) destaca que diversos autores proponen que el trabajo con distintos tipos de representaciones externas permite una mejor aproximación a los objetos matemáticos.

En nuestro trabajo, nos centraremos en el análisis de las representaciones externas, y usaremos el término representación para referirnos a las representaciones externas consideradas como objeto, adoptando la definición usada por Castro y Castro (1997): "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96). Las representaciones externas juegan una doble función: actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan. Pero, según Rico (2009), una representación no cobra sentido por sí sola y de forma aislada, sino que debe contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones. De ahí la necesidad de definir qué son estos sistemas de representación, y qué tipo de sistemas se consideran en el campo en que estamos trabajando.

Gómez (2007), se refiere a los sistemas de representación como "los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto" (p. 41), y señala que los sistemas de representación organizan los símbolos mediantes los cuales se hacen presentes los conceptos matemáticos, aportan distinto significado para cada concepto, y por lo tanto, un mismo concepto admite y necesita varios sistemas de representación complementarios.

En este trabajo asumimos la definición de Castro y Castro (1997), para señalar que los sistemas de representación "son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto" (p. 102).

Tipos de sistemas de representación

Rico (2009) apunta que una característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad

Presentamos a continuación una clasificación de tipos de representaciones que vamos a utilizar al analizar las producciones de los estudiantes, basándonos en todo lo expuesto hasta el momento, y partiendo de la clasificación establecida por Kolloffel, Eysink, De Jong y Wilhelm (2009) para otros contenidos matemáticos, que más tarde fue restructurada por Cañadas y Figueiras (2011). Aunque estas clasificaciones han sido usadas en el contexto de problemas de combinatoria, son aplicables a nuestro estudio. Estas autoras identifican cuatro sistemas de representación en su estudio: (a) aritmética, (b) algebraica, (c) textual y (d) sintética (textual-aritmética). En el presente estudio englobamos las representaciones aritméticas y algebraicas en un orden superior: representaciones simbólicas. Además añadimos los sistemas de representación tabular y pictórica, frecuentes y útiles en tareas relacionadas con el pensamiento algebraico. A continuación presentamos los sistemas de representación considerados, acompañados de ejemplos concretos de los alumnos[4] cuyas producciones analizamos en este estudio. En los Capítulos 5 y 6 mostramos ejemplos de las representaciones aquí descritas.

Verbal

Se sirven del lenguaje natural para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2007).

Tabular

La RAE (2001), define tabla como un “cuadro o catálogo de números de especie determinada, dispuestos en forma adecuada para facilitar los cálculos”.

Las tablas toman parte en el campo de las representaciones en el contexto del pensamiento funcional. Brizuela y Roth (2002) lo ponen de manifiesto y estudian los distintos modos en que los estudiantes representan información de problemas en forma de tablas de producción propia.

Nos referimos aquí a la representación tabular como aquella en la que los alumnos se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.

[4] Para mayor comodidad en el análisis de datos, los alumnos son identificados con la letra A acompañada de números del 1 al 20.

Pictórica

Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueras, 2007).

Simbólica

Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8).

Distinguimos dentro de las representaciones simbólicas dos subtipos: numéricas y algebraicas.

Numérica: Se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo.

Algebraica: Se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Son las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción en los estudiantes.

Múltiples

Van Somersen (1998, citado por Cañadas, Castro y Castro, 2011) consideran las representaciones múltiples como aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos en este trabajo.

GENERALIZACIÓN

Piaget y colaboradores han sido unos de los primeros autores en tratar la generalización destacándola como proceso fundamental en la construcción del conocimiento. Establecen relaciones entre los conceptos de generalización y abstracción. La generalización estaría sometida a la abstracción y tendría como tarea el establecimiento de regularidades en lo real. Hablan sobre un tipo de abstracción empírica, en la que la generalización es de naturaleza extensional, es decir, solo implica el paso de algunos a todos (Piaget, 1975). Más próximo al ámbito matemático, Krutestskii (1976) considera la generalización como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

Kaput (1999, citado por Castro, Cañadas y Molina, 2010) define generalizar como:

> *… extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos* (p. 58).

Cañadas y Castro (2007) consideran que la generalización implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares. Es un paso clave, el más costoso en términos cognitivos dentro del razonamiento inductivo. Castro, Cañadas y Molina (2010) destacan la importancia de la generalización para generar conocimiento matemático y señalan que "es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común, a partir del descubrimiento de patrones" (p. 55).

Dörfler (1991) señala que tanto en la vida cotidiana como en el pensamiento científico, las generalizaciones son de gran importancia ya sea en la construcción de conceptos o proposiciones como en la generación de ideas, hipótesis o argumentaciones. Este autor, otorga importancia a la generalización tanto en el pensamiento individual como en el desarrollo de la comunicación social al declarar que "las generalizaciones son tanto objetos como medios de pensamiento y comunicación" (p. 63).

Según Cañadas, Castro y Castro (2011), la relación entre el álgebra y la expresión de generalización se ha incrementado desde el trabajo de autores como Mason, Graham, Pimm o Gowar (1985). Desde ese trabajo ha tomado fuerza la idea de que el lenguaje algebraico no es el único camino para generalizar. En ese sentido, Radford (2002; 2010) muestra como algunos estudiantes usan procesos verbales o gestuales para expresar generalización.

Existen distintos tipos de generalizaciones que los autores ubican en diferentes clasificaciones. En primer lugar, Dörfler (1991) distingue entre generalizaciones empíricas y generalizaciones teóricas. Las primeras consisten en encontrar una cualidad o propiedad común entre muchos objetos o situaciones y darse cuenta de que esos objetos tienen algo en común y general a esos objetos y situaciones. Nosotros nos centraremos en este tipo de generalizaciones.

En la relación entre la generalización y patrones lineales, Stacey (1989) distingue entre generalización cercana, que implica encontrar un patrón próximo o elementos que pueden ser hallados por conteo, dibujando o haciendo una tabla; y generalización lejana, en la que encontrar un patrón requiere entender la regla general.

Por otro lado, otros autores se centran en la forma en que se expresa la generalización y la naturaleza de las representaciones utilizadas durante el proceso. Radford (2010) diferencia entre: (a) generalización algebraica, cuando los estudiantes llegan a obtener una expresión que les permite obtener cualquier caso particular, y (b) generalización aritmética, cuando los estudiantes manifiestan numéricamente haber identificado el patrón común de los casos particulares y lo utilizan para obtener cualquier otro caso particular, pero sin introducirse en el contexto algebraico. Cañadas, Castro y Castro (2008) también diferencian la generalización textual (a la que denominan verbal) cuando los estudiantes expresan con lenguaje natural lo común que han identificado en los casos particulares y lo aplican en cualquier otro caso particular. Cañadas, Castro y Castro (en prensa) mencionan la generalización que los estudiantes ponen de manifiesto mediante dibujos o esquemas, a la que llamaremos generalización pictórica.

Tareas de generalización

Las tareas de generalización involucran la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos. Radican en generar, a partir de los casos particulares dados, nuevos casos particulares o la expresión del término general. Para ello es necesario generar una pauta o patrón de comportamiento de los elementos conocidos. En ocasiones, en las tareas de generalización se proporciona únicamente una secuencia numérica y la acción consiste en hallar el término general de la misma.

Moss y Beatty (2006) indican que las tareas de generalización son también conocidas como tareas de secuencias numéricas o secuencias geométricas crecientes. Las autoras presentan patrones de crecimiento en diferentes contextos. Proponen a los estudiantes una serie de secuencias numéricas o geométricas y piden que la expresen como una función o "regla".

Dentro de las tareas de generalización se puede diferenciar entre las tareas que presentan diferentes casos particulares y se plantea identificar el patrón y llegar a la generalización; y aquellas que se plantean esas mismas cuestiones pero sólo a partir de un caso particular. Este segundo caso se conoce como ejemplo genérico. Mason y Pimm (1984) hablan de los ejemplos genéricos como ejemplos cotidianos, pero que se presentan con la intención de mostrar lo general.

Balacheff (2000) define el ejemplo genérico como el caso en que se dan procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Este autor focaliza su atención en los procesos de validación, de forma que considera que si se suprimieran los ejemplos genéricos presentes en algunas demostraciones, la demostración quedaría con una falta de información y podría llegar a carecer de significado. Fillao y Gutierrez (2007), dentro del mismo contexto de los procesos de validación, definen el ejemplo genérico como una de las estrategias que los estudiantes pueden usar en sus respuestas, a la hora de llevar a cabo demostraciones: "cuando en la demostración o en la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos" (p. 357).

Para resolver tareas, en particular las de generalización, los alumnos recurren a estrategias. De las definiciones de estrategia ofrecida por la RAE (2001), destacamos la aplicada al ámbito matemático: "…3. f. *Mat*. En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento". Nos ceñimos aquí a la definición de Rico (1997), también usada en Cañadas, Castro y Castro (2008), quienes consideran las estrategias como "cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (p. 31). Existen estrategias distintas que pueden alcanzar un mismo resultado. Rico (1997) también apunta que "las estrategias más usuales en la educación obligatoria[5] son:

[5] La educación obligatoria en aquel año incluía la educación primaria actual.

estimar, aproximar, elaborar un modelo, construir una tabla, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar" (p. 31).

Justificación de conjeturas

En el proceso de resolución de una tarea, uno de los pasos a seguir es justificar o argumentar la respuesta dada. En particular cuando los alumnos se enfrentan a tareas de generalización, usualmente formulan conjeturas sobre el caso particular o el término general que se les pide. La generalización no puede estar separada de la justificación. Cuando se justifica un modelo algebraico, un argumento es considerado válido si conecta a un esquema geométrico que es generado basándose en una conceptualización visual de la situación (Lannin, 2005).

Marrades y Gutiérrez (2000, citado por Cañadas, 2007) consideran que una justificación es cualquier razón dada para convencer a la gente (profesor a alumnos, estudiante a otros estudiantes, por ejemplo) de la verdad de una afirmación.

La justificación aparece relacionada en la literatura de investigación con otros términos como argumentación, demostración o prueba. En este trabajo, no entraremos en el detalle de estos términos y consideraremos la argumentación, la prueba y la justificación como términos equivalentes, dando a la demostración un significado más formal propio de la Ciencia Matemática. Esta autora alude a la justificación de conjeturas dentro del proceso inductivo como "toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación" (Cañadas, 2007, p. 78).

Al estudiar el uso de patrones y la capacidad de generalización de los alumnos, parece conveniente contar con una explicación del porqué de las respuestas de nuestros sujetos, con vistas a un análisis más completo de la actividad. Por ello en el presente trabajo prestaremos atención a los argumentos que dan los alumnos para justificar sus conjeturas.

INVESTIGACIONES PREVIAS

En este apartado resaltamos los principales trabajos relacionados con la Early-Algebra, el uso de patrones, la generalización, y las representaciones, que constituyen los antecedentes de nuestro trabajo. Partimos de los trabajos relacionados con la Early-Algebra, para luego centrarnos en estudios más específicos de ese campo, y terminar con trabajos de nuestro grupo de investigación (Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico).

Destacamos en primer lugar el trabajo de Stacey (1989) que engloba ideas incluidas posteriormente en la propuesta Early-Algebra. Es uno de los trabajos clásicos en este campo, ofreciendo en su estudio respuestas de estudiantes entre 9 y 13 años a diversas cuestiones que implican el uso de patrones lineales y la generalización, señalando los modelos matemáticos que seleccionan, las estrategias usadas en la implementación de estos modelos, y las explicaciones que dan los alumnos en sus respuestas. Las cuestiones principales que se hace son: (a) ¿Qué tipo de generalización realizan los alumnos?; (b) ¿Cómo explican los estudiantes los patrones que usan en las generalizaciones?; (c) ¿Cómo de consistentes son los estudiantes en la elección de una estrategia para generalizar?; y (d) ¿Qué diferencias hay entre las respuestas de los estudiantes que han tenido alguna experiencia con cuestiones de generalización y los que no?. En cuanto a los resultados, el autor observa cierta inconsistencia en la elección de un modelo, dado que estudiantes que empiezan una tarea correctamente, frecuentemente adoptan un modelo más simple pero incorrecto para las partes más difíciles de la tarea. Por otro lado, aquellos alumnos que habían tenido una experiencia previa con tareas de generalización, obtuvieron mejores resultados que el resto, ya que implícitamente usaron un modelo lineal y patrones numéricos. Estos últimos alumnos mostraron entender la relación entre los datos y la regla de generalización de forma más completa.

Lins y Kaput (2004) y Brizuela y Martínez (en prensa) señalan que lo investigado hasta la década de los 80, en relación con la Early-Algebra se centró en lo que los alumnos no podían hacer, y contribuyeron al reconocimiento de que era mejor posponer el estudio del álgebra para cursos posteriores a la educación básica. Estos autores, citando a Mason (1996), indican que en la década de los 90 esta perspectiva cambia y se defiende la consideración de que los alumnos llegan al colegio con capacidades naturales de generalización y habilidades para presentar generalidad, y esas capacidades han de ser explotadas.

Por otra parte, Brizuela y Lara-Roth (2002) presentan el trabajo de niños de 7 años con tablas en las que representan las funciones, dando un número determinado de valores para sus variables. Exploran las diferentes formas en que los niños representan la información en una tabla diseñada por los alumnos sin indicaciones previas de un problema en el que está implicada una función. Argumentan que las elecciones que los niños hacen sobre el tipo de información que representar o no, así como la forma en que construyen las tablas, evidencian algunas de las cuestiones que pueden encontrar relevantes en la construcción de esas tablas en las que se representan funciones. La metodología a seguir fue la realización de tareas escritas. En cuanto a los resultados, la mitad de los niños siguió un orden temporal en los datos, distribuidos cronológicamente en filas o columnas. La información acerca del tipo de caracteres pertenecientes a cada columna o fila, es explícita en la mayoría de casos (de ahí se resalta la importancia de tener una referencia para las cantidades). En definitiva, estos autores concluyen que las tablas parecen ayudar a los alumnos para comprender las relaciones aditivas.

Blanton y Kaput (2004) presentan un estudio que versa sobre cómo los estudiantes de grados elementales desarrollan y expresan funciones. Los datos fueron analizados de acuerdo a las formas de representación que los estudiantes usaban, la progresión del lenguaje matemático de los estudiantes y las operaciones que empleaban, y cómo atendían a una o más cantidades variables. Los resultados indican que los estudiantes son capaces de presentar un pensamiento funcional en grados más tempranos de los que se creía. En particular, los datos sugieren que los estudiantes pueden desarrollar un pensamiento covariacional incluso en educación infantil, y son capaces de describir relaciones de correspondencia entre cantidades tan pronto como en primer grado. Aunque el descubrimiento de patrones en variables simples está ya incluido en el currículo elemental de Estados Unidos, concluye que sería aconsejable que los alumnos de matemáticas en edades tempranas tuviera en cuenta el pensamiento funcional.

También Blanton y Kaput (2011) exploran cómo los profesores de grados elementales pueden usar el pensamiento funcional para incluir el razonamiento algebraico en el currículo y en la enseñanza desde edades tempranas. Proponen que los alumnos deben, desde el comienzo de la escuela, trabajar con patrones recursivos para incluir en el currículo los conceptos de función y pensamiento funcional en edades tempranas. Describen cómo los profesores transforman y extienden sus recursos actuales, para que el contenido aritmético pueda proporcionar oportunidades a la construcción de patrones, las conjeturas, la generalización, y la justificación de relaciones matemáticas entre cantidades.

En la actualidad va en aumento el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la educación primaria (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006) y llevan a cabo investigaciones que pongan de manifiesto su utilidad.

Carraher, Martínez y Schliemann (2007) examinan cuestiones que surgen en la realización de tareas de generalización de 15 estudiantes de tercer grado (8 años) sobre figuras geométricas, como introducción a las funciones lineales. Se centran en los conceptos de patrones, funciones y generalización en educación matemática, examinado cómo los estudiantes producen y representan generalizaciones durante la implementación de dos lecciones de un estudio longitudinal basado en la propuesta Early-algebra. Presentan a los alumnos dos tareas en las que han de expresar su capacidad de generalización a partir del descubrimiento de un patrón. Teniendo en cuenta los resultados del experimento concluyen que los niños desarrollaron diferentes tipos de generalización de forma correcta (incluso algunas que los investigadores no habían tenido en cuenta en un principio). Los estudiantes están inclinados a pensar en las funciones lineales recursivamente. Opinan que no es pertinente introducir la generalización directamente en la forma en que la encontramos en el campo de las matemáticas para estudiantes en edades tempranas. Los alumnos deben aprender primero a cómo hacer generalizaciones matemáticas sobre problemas sobre los que ellos han podido identificar patrones, relaciones o estructuras. Gradualmente, aprenderán a formular esas generalizaciones usando notación algebraica, y también aprenderán a derivar nueva información a través de otras expresiones algebraicas, propias o ajenas.

En tareas de generalización, es clave la identificación de patrones. En ese sentido destacamos estudios como el de Cole (2004), propone a niños de educación infantil la realización y continuación de patrones dados mediante figuras coloreadas. En educación primaria, va un poco más lejos, proponiendo los pasos para que se dé la generalización. La misma autora indica las tareas sobre patrones idóneas para cada etapa: en educación infantil, los alumnos han de reconocer, describir y extender patrones tales como secuencias de sonidos o patrones numéricos simples, y trasladar de una representación a otra. Durante los primeros años de educación primaria, sugiere plantear tareas como describir, extender, hacer generalizaciones sobre patrones numéricos y geométricos, y representar y analizar patrones y funciones, usando palabras, tablas y gráficos. Ya en los últimos años de educación primaria y comienzo de la secundaria, las tareas idóneas serán representar, analizar y generalizar variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y cuando sea posible, reglas simbólicas.

En el estudio de Lannin (2005), 25 alumnos de sexto grado trabajan con tareas de patrones en las que se requiere el desarrollo y la justificación de generalizaciones. Los estudiantes eran generalmente capaces de llevar a cabo generalizaciones apropiadas y justificar por medio del uso de ejemplos genéricos. Los estudiantes que usaron esquemas geométricos fueron más exitosos dando argumentos generales y justificaciones validas. Sin embargo, se realizó una pequeña discusión en grupo, en la que los estudiantes raramente justificaban sus generalizaciones, y en la que algunos se centraban más en valores particulares que en relaciones generales. Cuando las estrategias de los estudiantes salían a la luz en las discusiones, se pudo examinar el poder matemático y la validez de la variedad de estrategias y justificaciones introducidas por los propios estudiantes.

Moss y Beatty (2006) establecen como hipótesis de su trabajo que un apoyo apropiado a la construcción del conocimiento podría ayudar a los estudiantes a generalizar su razonamiento sobre funciones y les proporcionaría un contexto para ofrecer justificaciones. Trabajan con tareas y materiales que dan pie a identificar patrones de manera visual. Como conclusiones del estudio obtienen que los estudiantes suelen tener dificultades para encontrar relaciones o funciones implícitas en este tipo de problemas. Una razón es que el desarrollo de estrategias adecuadas les resulta difícil. Otra razón es que les falta interés y capacidad para justificar sus conjeturas.

Amit y Neria (2008) enfocan su estudio hacia los métodos de generalización usados por niños con talento en la resolución de problemas con patrones lineales y no lineales. El de las producciones a tres problemas revela dos enfoques en la generalización: recursiva-local y funcional-global. Los estudiantes mostraron flexibilidad mental, pasando con solvencia de representaciones pictóricas, verbales y numéricas, y abandonando enfoques de soluciones aditivas, a favor de estrategias multiplicativas efectivas. Se observa una comprensión intuitiva de la potencia de la generalización. Las generalizaciones de los estudiantes evidencian pensamiento algebraico en el descubrimiento de variables, constantes y las relaciones entre ellas, y en la comunicación de esos descubrimientos usando notaciones algebraicas producidas por los propios estudiantes. Este estudio confirma la importancia de la generalización en matemáticas y su potencial como puente hacia el mundo del álgebra.

Barbosa (2011) describe la actuación de 54 estudiantes de 6º grado cuando resuelven tareas de visualización con patrones implicados. La meta principal es describir las estrategias de generalización, las dificultades que emergen del trabajo de los estudiantes y el papel de la visualización en su razonamiento. Se trata de un estudio de casos en el que se implicaron tres escuelas diferentes de Portugal. Los estudiantes resolvieron 7 tareas trabajando en parejas. Los resultados muestran que se da una variedad de estrategias de generalización con frecuencias de uso diferentes. Los estudiantes lograron mejores resultados en las tareas de generalización próxima que en las de generalización lejana. Algunos pares trabajaron exclusivamente en contextos numéricos, usando estrategias inadecuadas. A lo largo del estudio, estas tendencias fueron invertidas gradualmente en la mayoría de estudiantes. En algunos casos, los estudiantes mostraron dificultades para encontrar relaciones funcionales, verificando las reglas de generalización por casos particulares. La visualización resulta útil en diferentes situaciones, permitiendo a algunos alumnos encontrar diferentes expresiones para representar el mismo patrón. Concluyen que es importante suministrar tareas que permitan la aplicación de estrategias diversas y reten a los alumnos a usar y entender el potencial de estrategias visuales, estableciendo una relación entre el contexto numérico y el visual, lo que debe llevar a una mejor comprensión del significado de los números y las variables.

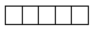
Dentro del grupo en el que se desarrolla esta investigación existen diversos antecedentes. Un referente en España es el trabajo de Castro (1995) cuyo objetivo es:

> *poner de manifiesto, analizar e interpretar la comprensión que muestran los escolares de 13 y 14 años de edad sobre las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y término general de una sucesión cuando se incorpora un sistema ampliado de simbolización para los números naturales* (pp. 4-5).

La autora sigue una metodología de investigación-acción para alcanzar el objetivo propuesto. Además, señala la efectividad de la enseñanza a través de las configuraciones puntuales[6] en el reconocimiento de patrones puede facilitar la comprensión de las nociones de término general, patrones y relaciones numéricas, entre otras.

Como línea de continuación al trabajo de Castro (1995), encontramos la tesis doctoral de Cañadas (2007). Además, hay numerosas producciones que se enmarcan en el grupo de investigación relacionadas con este estudio. Por ejemplo, Cañadas, Castro y Castro (2008) describen los patrones y generalización que llevan a cabo 359 estudiantes en la resolución del problema de las baldosas (ver figura 2.7).

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?

- Justifica tu respuesta.

Figura 2.7. Problema de las baldosas

Prestan especial atención a los tipos de patrones identificados, a la forma en que los estudiantes expresan la generalización y, mediante la descripción de las estrategias utilizadas, presentan algunas características de la generalización referentes a los elementos y a los sistemas de representación utilizados. En el análisis de datos se centran en el patrón identificado y en la generalización. Entre los resultados, encuentran que el 40,7% de los estudiantes llega a identificar un patrón, y lo hacen de diferentes modos. El 19,5% de los que respondieron llegan a expresar generalización (verbal o algebraicamente). Concluyen que, pese a la presencia del sistema de representación gráfico[7] en el enunciado, muchos estudiantes que generalizan trabajan con el numérico, lo que puede deberse a la mayor familiaridad con estas representaciones. Se pone de manifiesto la relevancia de la identificación de patrones en el proceso de generalización (detección de uno, e identificación del adecuado). Predomina la generalización verbal, por lo que parece ser más accesible. Se utiliza la generalización ocasionalmente, para calcular el caso particular por el que pregunta el problema.

[6] Nos referimos con esto a un tipo de representación pictórica.

[7] En este trabajo nos referimos al sistema de representación gráfico como pictórico.

CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de la investigación es analizar el pensamiento funcional de un grupo de 20 estudiantes de 5º de educación primaria que resuelven tareas de generalización a partir de un ejemplo genérico. En dicho contexto centramos el análisis en los patrones, la generalización y las representaciones utilizadas al trabajar con relaciones funcionales entre las variables involucradas.

Este objetivo, se descompone a su vez en varios objetivos específicos:

1. Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención al uso de patrones, tanto en el trabajo centrado en la relación directa como el relativo a la relación inversa entre las variables.
2. Describir las representaciones (verbal, numérica, pictórica, algebraica o tabular) que los alumnos utilizan en las tareas de generalización.

Tomando estos objetivos como referencia, se ha llevado a cabo el diseño del instrumento para la recogida de datos, y el análisis de los datos recogidos. Todo ello se detalla en los apartados que siguen.

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo definimos los objetivos de investigación, caracterizamos el tipo de investigación desarrollada y describimos la elaboración del instrumento con el que se recogieron los datos, el proceso de recogida de datos y las características de los sujetos participantes en el estudio, prestando especial atención a los conocimientos previos de los mismos. La descripción del proceso de diseño del instrumento de recogida de datos incluye el desarrollo de dos estudios pilotos realizados antes del estudio definitivo.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

La investigación que aquí presentamos es de naturaleza exploratoria y descriptiva. Se trata de un estudio que pretende recopilar información preliminar que sirva de fundamentación para el diseño y la elaboración posterior de una Tesis Doctoral centrada en el pensamiento funcional de estudiantes de los primeros niveles educativos.

Nuestro trabajo responde a una investigación transversal ya que la llevamos a cabo en un momento determinado. Recogemos información procedente de un grupo de estudiantes elegidos intencionalmente a los que se les propone una prueba escrita elaborada ad hoc por los investigadores. Se trata de un diseño cuasi-experimental simple de solo post test (León y Montero, 1997). Realizamos un análisis cuantitativo y cualitativo de las producciones de los estudiantes. La recogida de información se realiza mediante una prueba escrita y se analizan las producciones de los estudiantes cuantitativa y cualitativamente.

SUJETOS

En este apartado describimos las características generales de los sujetos así como otras más específicas que tienen que ver con nuestra investigación.

Características generales de los sujetos

La muestra seleccionada para realizar la investigación la constituyen 20 alumnos de 5º curso de educación primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, que cursan la materia de matemáticas en un colegio privado de la ciudad de Málaga, en el curso académico 2011-2012. Este centro educativo abarca las etapas de educación infantil, educación primaria, y educación secundaria obligatoria, con dos grupos por cada curso en la mayoría de niveles.

La selección de sujetos fue intencional, atendiendo al nivel educativo que cursaban los estudiantes y su disponibilidad para participar en esta investigación. No identificamos en los mismos ninguna característica reseñable que pudiera sesgar los resultados de la investigación.

Conocimientos previos de los sujetos

Con anterioridad a la recogida de datos, en el mismo curso académico (2011-2012), los sujetos no habían trabajado tareas sobre patrones, como la planteada en nuestro estudio según la información suministrada por la maestra. Como señalábamos en el apartado "Justificación curricular", en el currículo de la etapa de primaria no se trabajan contenidos algebraicos de forma directa, como pueden ser los relacionados con la generalización, el uso de patrones, o el pensamiento funcional.

En cuanto al uso de sistemas de representación, con excepción del algebraico, los alumnos sí acostumbran a trabajar con los sistemas de representación verbal, numérico, pictórico y tabular. En el caso del sistema de representación tabular, hasta el momento no se había dado demasiada importancia a las tablas en la asignatura de matemáticas. Las tablas trabajadas hasta el momento habían sido muy simples, si bien la perspectiva de elaborar por sí mismos una tabla sin ningún tipo de indicación, era una experiencia novedosa para le alumnado.

INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Para llevar a cabo la recogida de información utilizamos varios instrumentos. En primer lugar notas del investigador en las que recogimos las dudas de los alumnos y los acontecimientos acaecidos durante la prueba, en segundo lugar una grabación de audio de la realización del estudio definitivo, y en tercer lugar la prueba escrita que los alumnos realizaron.

Nos centraremos en este trabajo en el tercer instrumento, una tarea que presenta una tarea de generalización compuesta por diez cuestiones relacionadas con un enunciado previo en el que se describe una situación y que se acompaña de una representación gráfica. El contexto que se presenta con el enunciado y la representación gráfica describe un ejemplo genérico.

Diseño de la prueba escrita

Para el diseño de la prueba tuvimos en cuenta los objetivos de investigación ya presentados y las aportaciones de trabajos mencionados previamente. Nos planteamos la confección de una tarea que tratara sobre la generalización, y a su vez, usara un ejemplo genérico del que partieran los alumnos, acompañado de una representación pictórica. En base a ello consideramos las siguientes variables de tarea:

- Generalización cercana/lejana (según términos de Stacy (1989)
- Uso de patrones en relaciones entre dos variables, para el caso de relación directa (se ofrece una variable como independiente y la otra como dependiente) y para relación inversa (se altera la dependencia en las variables).
- Uso de patrones en tareas con distinto número de variables (2 o 3).

La versión final de la prueba se deriva de varias versiones anteriores que fueron experimentando cambios a medida que se realizaron estudios piloto y reuniones entre los investigadores. Describimos el proceso de elaboración de la prueba a partir de la realización de dos estudios piloto en los que se utilizó una versión inicial de la misma.

Estudio piloto 1

El primero de los estudios piloto tuvo lugar el 1 de Marzo de 2012 en una sesión del curso "Pensamiento Numérico y Algebraico II" perteneciente al Máster en Didáctica de las Matemáticas 2011/2012. Los sujetos que realizaron la prueba fueron tres de los compañeros matriculados en la asignatura.

El objetivo de este primer estudio piloto fue doble. Por un lado, queríamos comprobar la viabilidad de la prueba (que en ese momento se correspondía con la versión 1; ver Anexo a) analizada, tras la resolución de la misma, desde el punto de vista de adultos relacionados con el campo de la Didáctica de la Matemática y con trato habitual con niños de 5º de primaria en contexto escolar. En segundo lugar, se buscaba obtener información que guiara la mejora de la redacción de las cuestiones y situación que componen la tarea, partiendo de los objetivos de la investigación y de cada una de las cuestiones.

En este estudio piloto 1 utilizamos la versión 1 del instrumento (Anexo a). Incluimos dos tareas diferenciadas. En la tarea 1 utilizamos la disposición de mesas y personas mostrada en la figura 4.1.

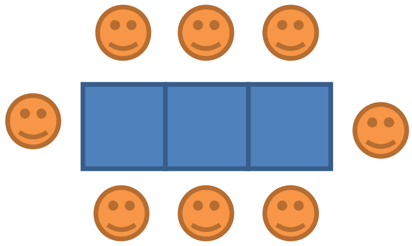


Figura 4.1. Imagen presentada en tarea 1 del estudio piloto 1

En la tarea 2 introdujimos la disposición de mesas mostrada en la figura 4.2.

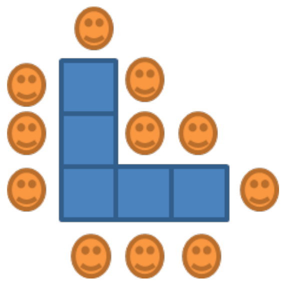


Figura 4.2. Imagen presentada en tarea 2 del estudio piloto 1

El estudio piloto 1 tuvo éxito y aprobación entre los compañeros, que no sabían que iban a realizar el trabajo hasta el mismo momento en que se les comunicó. Además de ser fructífero por la información recogida relativa a la mejora del instrumento fue informativo analizar las respuestas dadas por los mismos a la prueba en sí permitiendo identificar diferencias interesantes en la forma de abordar las cuestiones, en especial en las explicaciones relativas a la generalización realizada.

Los principales aportes al diseño de la recogida de datos que se derivan del estudio piloto 1 son los siguientes:

1. Completar las instrucciones previas a la resolución de la tarea con las siguientes indicaciones:

- Señalar que es importante que en la hoja de tarea se escriba o dibuje todo, y no se haga en una hoja a parte.

- Exponer gráficamente un contraejemplo en la explicación, a la hora de hablar de dónde no puede colocarse a un alumno.

- Añadir algún tipo de aliciente a la tarea (algún premio) para motivarlos.

2. Quitar densidad en el texto de la tarea. Introducir espacios para contestar a las cuestiones y presentar la imagen al lado del texto introductorio.

3. Contextualizar la tarea para motivar a los alumnos. Por ejemplo, hablándoles de que se trata de una fiesta de cumpleaños en la que hay que sentar a los invitados.

4. No incluir varias cuestiones en las que haya que usar tablas porque puede inducir a repetir el mismo tipo de tabla, como ocurrió en este primer estudio piloto.

5. Sugerir la realización de un dibujo en las cuestiones que aluden al término general.

6. La tarea 2 parece difícil para alumnos de quinto curso de primaria. Además, presenta dificultades de contenido añadidas. Por ejemplo, el hecho de que n debe ser mayor que 3, que solo valdría para n impar si queremos mantener el mismo número de mesas a cada lado. Decidimos cambiar esa tarea.

7. En cuanto al resto de aspectos, como el tiempo para realizar la tarea, el orden de las mismas o la dificultad, los compañeros no proponen modificaciones.

Las diferencias principales entre ambas son la inclusión de la sugerencia a los alumnos de que realicen un dibujo en las preguntas en las que se les pide la expresión general tanto del caso de la relación directa como en el de la inversa, y la presentación en la tarea 2 de una nueva situación, ya que la de la versión anterior (mesas en forma de L) parecía demasiado compleja.

Tras el estudio piloto 1, modificamos el instrumento para el estudio piloto 2 (Anexo b).

Estudio piloto 2

Posteriormente, y tras las rectificaciones pertinentes en el instrumento, se llevó a cabo el segundo estudio piloto que protagonizaron un niño y una niña que cursaban 5º de primaria, cuyas producciones pueden observarse en el anexo e. Realizamos el estudio de manera individual a fin de clarificar algunos aspectos que aún eran problemáticos en el instrumento (redacción, tiempo de ejecución estimado, comprensión de las preguntas, etc.). Utilizamos la versión número 3 del instrumento (Anexo c) en la que ya se habían tenido en cuenta los resultados del primer estudio piloto.

Los objetivos que perseguíamos con este nuevo estudio piloto son similares a los del estudio piloto anterior. En este caso lo observado fue de una trascendencia mucho más directa en nuestras decisiones con vistas a la formalización de la versión final de la tarea y el modo de aplicación de la misma, ya que se trató de un estudio con sujetos similares a los del estudio definitivo. Pretendíamos observar también si la explicación de la prueba era clara, concisa, y bien entendida por los alumnos sin que diera lugar a confusión. También quisimos observar si el tiempo estimado de realización de la tarea (40-45 minutos) era adecuado, y comprobar que la redacción de las preguntas no era complicada de entender por parte de los alumnos.

Las pruebas fueron realizadas de forma individual, en ubicaciones y momentos diferentes. El modelo de la tarea en el caso del alumno 1, difiere un poco respecto al del alumno 2, debido a cambios mínimos en la redacción de los enunciados que se realizaron tras la impresión del primero.

El cambio fundamental en la versión del instrumento utilizada, versión 3 (Anexo c), respecto de la versión anterior, es la desaparición de la segunda tarea, a favor de una pequeña ampliación de la primera tarea, que pasa a constar de 10 cuestiones. La ampliación requiere que los alumnos realicen una nueva generalización a partir del número de cubiertos que se necesitan en la fiesta (una cuchara y un tenedor por alumno). Realizamos cambios mínimos en el espaciado de las cuestiones.

Destacar que al final de las cuestiones 3, 5 y 10, añadimos una sugerencia al alumno para que explique cómo ha averiguado la respuesta: “¿Cómo sabes que eso es así?”. Además, el enunciado en la cuestión 6, también es novedoso, ya que parece a priori la más conflictiva y, por ello, pretendemos presentarla de la manera más simple posible. Cabe también destacar la eliminación de la propuesta de un dibujo en los enunciados de las cuestiones 5 y 9.

Logramos nuestros objetivos con este segundo estudio piloto. A partir del mismo acordamos algunos cambios menores en la redacción de las cuestiones que constituyen el instrumento. Al analizar los resultados de la prueba, así como lo acontecido antes, durante y después de su aplicación, las principales conclusiones que pudimos extraer fueron las siguientes:

1. No modificar la redacción de la tarea salvo cambios mínimos, ya que en ninguno de los dos casos hay dificultades en la lectura de las cuestiones, salvo la cuestión 6 en que ambos alumnos presentan dudas y no responden.
2. Corroborar que el tiempo estimado para la realización de la prueba (45-50 minutos) es suficiente, ya que los dos niños tardan entre 35 y 40 minutos en responder a todas las cuestiones.
3. Con vistas al estudio definitivo, indicar a los alumnos que utilicen bolígrafo ya que uno de los niños, que realiza la tarea a lápiz, borra algún dibujo que hace y presumiblemente con ello perdemos información.

Tras la realización del segundo estudio piloto, la prueba parece haberse adecuado al nivel de los alumnos y al tiempo estimado, por lo que los cambios realizados para dar lugar a la versión final (Anexo d) no son excesivos. En cada una de las preguntas añadimos la frase final "Explica cómo lo has averiguado" o "¿Cómo sabes que eso es así?", con la intención de que los alumnos no se limiten a dar la respuesta sin explicar nada. A pesar de ello, les insistiríamos en lo mismo en la presentación de la tarea. Además modificamos la cuestión 6 dado que los niños mostraron dificultades para entenderla.

Además de cambios menores en los enunciados, o en las cifras que se pedían en los casos concretos, la prueba no fue modificada respecto a la versión anterior. Obtuvimos así la versión definitiva que llevaríamos al estudio definitivo y con la que realizaríamos la recogida de datos en la investigación.

Versión definitiva de la prueba escrita

En la versión final del instrumento (Anexo d) describimos a los alumnos la siguiente situación:

> "Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.
>
> Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado".

El texto se acompaña de la figura que representa el ejemplo genérico que ofrecemos a los alumnos (Figura 4.1) y va seguido de las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?
2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.
3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.
4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.
6. Vamos a utilizar la letra n para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra n el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.
7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

La justificación del contenido del instrumento tiene que ver con las variables de tarea que surgen del marco teórico y que hacen referencia a los elementos relacionados con el pensamiento funcional. Las características de las cuestiones son las siguientes:

- Las primeras tres cuestiones hacen alusión a un una relación[8] directa entre las variables implicadas (mesas y niños), cuestionándoseles por casos particulares.
- En la cuestión número 4, sugerimos a los alumnos que organicen los datos obtenidos hasta el momento en una tabla.
- Las cuestiones 5 y 6, hacen referencia a la generalización de un modo más explícito. En la cuestión 6 introducimos el término *n*, instando a los alumnos a que puedan expresar la generalización utilizando simbolismo algebraico.
- Las cuestiones 7, 8 y 9, hacen referencia a la relación inversa entre las variables: se les informa del número de niños que asisten al cumpleaños, y se les pide el número de mesas necesarias. La cuestión 9, vuelve a proponer a los alumnos la expresión de la generalización.
- La cuestión número 10, versa sobre una relación con tres variables (mesas, niños y cubiertos) en la que proponemos a los alumnos que expresen la relación directa entre mesas y cubiertos.

INDICACIONES PARA LA PRUEBA

Una vez elaborada y definida la versión final del instrumento, y conocidas las características fundamentales del grupo de alumnos que iba a realizar la prueba, decidimos realizar una síntesis escrita de los principales instrucciones a tener en cuenta en la recogida de datos;

[8] En nuestra investigación, definimos que la relación entre las variables (número de mesas y número de niños) será directa, cuando la variable independiente sea el número de mesas y la dependiente el número de niños. La relación entre variables será inversa, si el número de niños actúa como variable independiente y el número de mesas como variable dependiente.

- En la presentación, decir a los alumnos que la tarea es parte de un trabajo de investigación, y ellos han sido seleccionados para llevarlo a cabo, por lo que es muy importante que colaboren y respondan lo máximo y mejor posible (efecto de motivación).
- Leer con ellos el enunciado y todas las cuestiones de la prueba antes de que empiecen a resolverla. Así sabrán a qué se enfrentan y podrán distribuir mejor el tiempo. También las dudas que haya que solventar respecto a algunas cuestiones más difíciles de comprender, como la de la 6 o la 10, quedarán resueltas de forma general, y evitamos tener que ir uno a uno cuando vayan llegando a esas cuestiones sobre las que con cierta seguridad plantearían interrogantes.
- Insistir en que es muy importante que expliquen lo máximo que puedan sus razonamientos.
- Si no entienden una cuestión y deciden dejarlo en blanco, decirles que indiquen qué es lo que no han entendido.
- Decir a los alumnos que intenten escribir todo en los folios que les damos (hay espacio suficiente), aunque si les hace falta podemos darle más.
- Indicar que hagan el ejercicio con bolígrafo, para evitar que borren y nos perdamos así algunos de los pasos que han seguido.
- Evitar el uso de corrector. Es preferible que tachen, ya que así podemos ver cuál era el razonamiento inicial que consideraron incorrecto.
- Indicar a los alumnos que deben responder en el orden en que aparecen las cuestiones.
- Aconsejar a los alumnos que si no saben responder a una cuestión, que no se agobien y pasen a la siguiente.
- Los alumnos pueden preguntar cualquier cosa que no entiendan, pero no podemos resolverles las cuestiones, solo "reformular el enunciado", es decir, intentar que ellos mismos se den cuenta de lo que tienen que hacer indicándoselo con otras palabras, pero no proporcionándoles datos a los que deben llegar por sí mismos.

- Apuntar con lápiz sobre la marcha en la medida de lo posible a qué ejercicio corresponde cada dibujo o anotación de los que puedan hacer en los folios a parte.
- Anotar como "notas del investigador" cualquier imprevisto o acontecimiento novedoso que pueda surgir durante la prueba.

Así, el diseño de la recogida de datos quedó cerrado.

RECOGIDA DE DATOS

Llevamos a cabo la aplicación de la prueba según las condiciones recogidas en este apartado. El alumno autor del trabajo fin de máster fue el encargado de la recogida de datos[9].

Durante la sesión, que fue registrada en una grabación de audio, los alumnos estuvieron en su aula habitual de matemáticas. El tiempo del que dispusimos fue aproximadamente 50 minutos. Al llegar al aula presenté la actividad leyendo la introducción. Más tarde entregué las pruebas escritas en papel, y mientras los alumnos trabajaban en la tarea, mostré mi disponibilidad para resolver dudas acudiendo a sus mesas.

Generalmente, nuestras impresiones tras la realización de la recogida de datos fueron buenas, el desarrollo de la prueba se dio como lo teníamos previsto y pudimos obtener de forma satisfactoria los la información necesaria para llevar a cabo el siguiente paso en la investigación: el análisis de datos.

CATEGORÍAS

Para establecer una primera definición de las categorías para el análisis de las producciones de los alumnos, partimos de algunas clasificaciones realizadas en estudios previos así como en consideraciones conceptuales tratadas en el marco teórico. El significado de esas categorías fue revisado y acordado dentro del equipo de investigación, de forma que llegamos a compartir un significado común, coherente con el marco teórico. Posteriormente, modificamos estas categorías atendiendo a las

[9] Se relata este punto en primera persona del singular.

producciones, introduciendo, adaptando, ampliando o eliminando las categorías iniciales. También analizamos en qué actividades tenía sentido considerarlas y en qué casos las producciones se correspondían con una u otra categoría. Utilizamos algunas categorías para el análisis de todas las cuestiones, mientras que otras tienen sentido sólo en algunas de ellas. Para llevar a cabo este proceso los investigadores individualmente asignamos esas categorías a diferentes respuestas, y más tarde comprobamos que el resultado era el mismo, independientemente del investigador. Así, revisamos todos los trabajos de todos los alumnos y asignamos valores a esas categorías establecidas.

A continuación presentamos las categorías consideradas, especificando en cada caso la procedencia inicial y justificando la adaptación llevada a cabo para esta investigación. Estas categorías no son excluyentes. Introducimos las categorías según si se refieren al tipo de respuesta, y al uso de diferentes estrategias, representaciones, generalización. En cada caso, detallaremos la cuestión de la prueba donde es aplicable cada categoría.

Categorías sobre el tipo de respuesta:

Respuestas Correctas/Incorrectas:

Atenderemos a esta categoría solo en aquellas cuestiones en las que la respuesta esté bien definida como una cifra concreta (Cuestiones 1, 2, 3, 7 y 8). Las cuestiones restantes, con la excepción de la Cuestión 4 en la que se trabajan las tablas, están enfocadas al desarrollo de expresiones que impliquen la generalización y no consideramos pertinente ni viable establecer una diferenciación entre expresiones correctas e incorrectas.

Respuestas directas:

En esta categoría incluimos las producciones de los alumnos que no ofrecen ningún tipo de explicación a su respuesta y, por tanto, no aportan información que nos permita identificar el tipo de estrategia utilizada. Esta categoría se asemeja a la categoría "Sin justificación" recogida en otros trabajos (ej., Lannin, 2005), que incluye aquellas respuestas que se presentan "sin una justificación añadida" (p. 236). Esta categoría se ejemplifica en la figura 4.3.

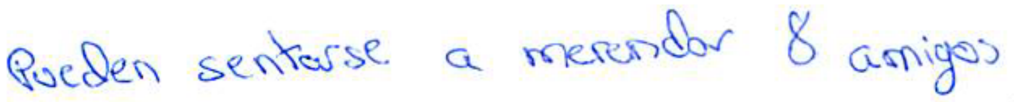


Figura 4.3. Ejemplo de respuesta directa de A5 para la Cuestión 1

Uso de estrategias:

Consideramos en este punto la definición de estrategia presentada en el marco teórico. Entre las estrategias identificadas en las respuestas de los alumnos distinguimos las siguientes: (a) conteo, (b) uso de patrones, (c) operación que no implica el uso de patrón, (d) uso de cuestiones anteriores y (e) repetición de las condiciones.

Conteo:

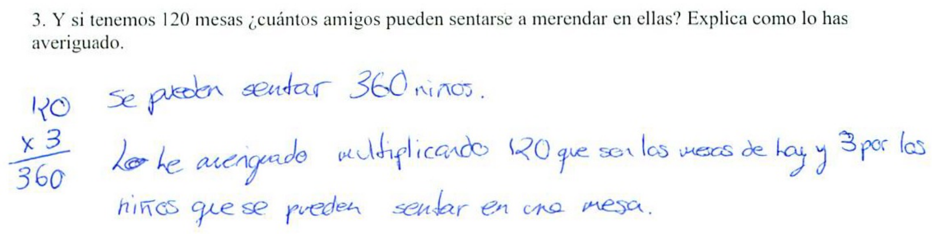
Adaptando la categoría definida por Barbosa (2011), consideraremos que los alumnos usan la estrategia de conteo cuando cuentan los elementos (mesas o niños en las cuestiones propuestas en la prueba) para dar respuesta a la cuestión. Un ejemplo de uso del conteo es el reflejado en la figura 4.4.

Figura 4.4. Ejemplo de estrategia de conteo de A15 para la Cuestión 2

Uso de patrones:

Atendiendo a la definición de patrón que asumimos en el marco teórico, entre las respuestas en que los alumnos trabajan con algún patrón distinguiremos varias subcategorias, adaptando la clasificación realizada por Lin, Yan y Chen (2004). Estas subcategorías se presentan a continuación mostrando un ejemplo de patrón en cada una de ellas (figuras 3.5, 3.6 y 3.7). Las letras M, N y C, simbolizan que en lugar de ellas los alumnos escriben una cantidad de mesas, niños o cubiertos, respectivamente, para operar con ella.

Uso de patrón inapropiado: El alumno usa algún patrón que no es pertinente a la cuestión trabajada. Se muestra en la figura 4.5 un ejemplo en el que A1 utiliza el patrón Mx3 en la cuestión 3.

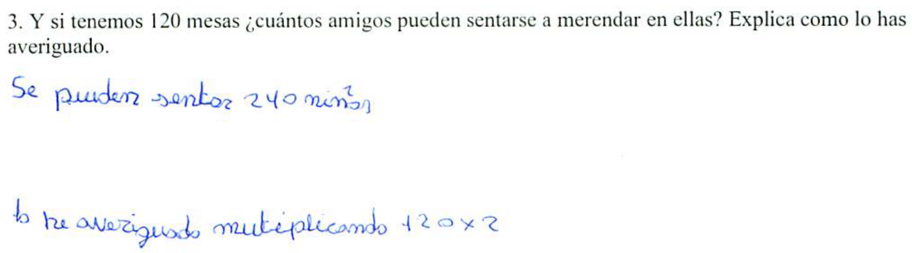

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

120 se pueden sentar 360 niños.
x 3
360

Lo he averiguado multiplicando 120 que son las mesas de hay y 3 por los niños que se pueden sentar en una mesa.

Figura 4.5. Ejemplo de uso de patrón inapropiado de A1 para la Cuestión 3

Uso de patrón apropiado pero incompleto: El alumno usa un patrón que corresponde a la tarea trabajada pero no es completo. El ejemplo que se presenta en la figura 4.6 es el del uso que A14 da del patrón Mx2 en la cuestión 3. Para ser un patrón completo, debería sumarse 2 por los niños de los extremos.

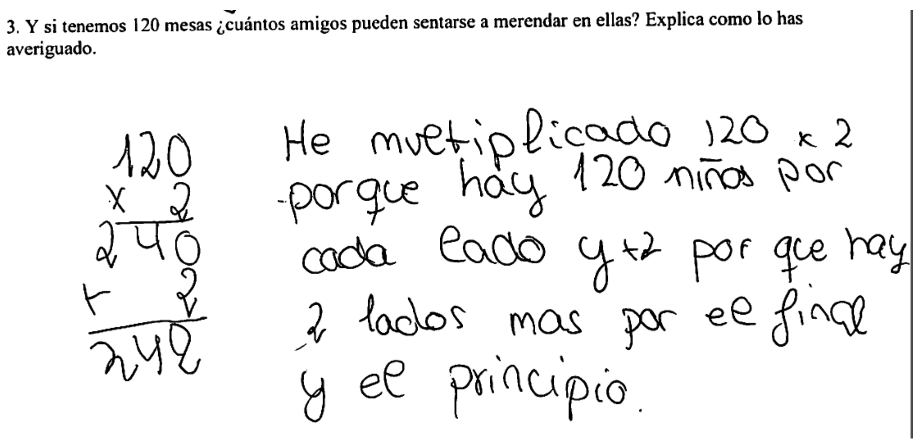

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

Se pueden sentar 240 niños

lo he averiguado multiplicando 120 x 2

Figura 4.6. Ejemplo de patrón apropiado pero incompleto de A14 para la Cuestión 3

Uso de patrón apropiado y completo: El alumno usa un patrón que corresponde a la tarea trabajada y resulta útil y completo para llevarla a cabo. Mostramos en la figura 4.7 el ejemplo de A8 en la cuestión 3, que responde con el patrón Mx2+2.


3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

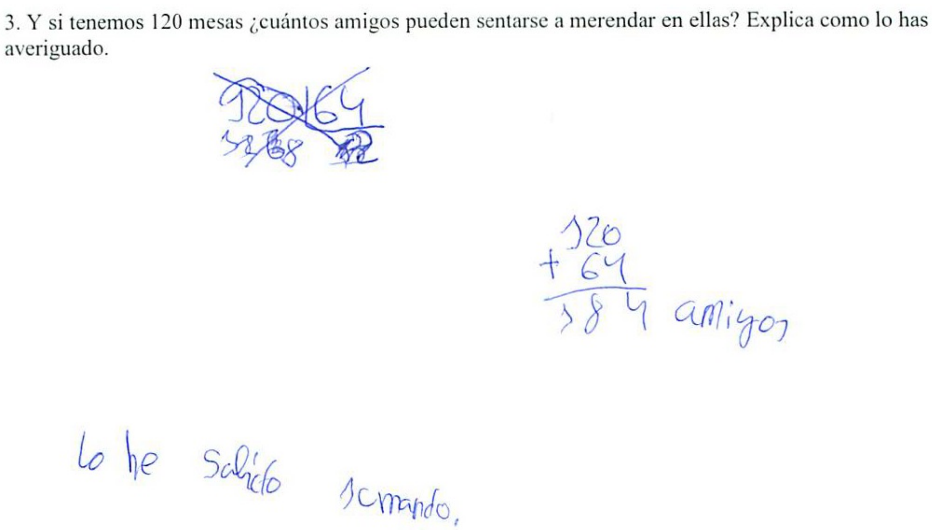
$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 2 \\ \hline 240 \\ +\ 2 \\ \hline 242 \end{array}$$

He multiplicado 120 x 2 porque hay 120 niños por cada lado y +2 por que hay 2 lados mas por el final y el principio.

Figura 4.7. Ejemplo de uso de patrón apropiado y completo de A8 para la Cuestión 3

Operación que no implica el uso de patrón:

Incluimos aquí aquellas producciones en las que utilizan alguna operación que no podemos relacionar con un patrón correspondiente a la cuestión en que se trabaja. Encajamos también aquí las respuestas en que los alumnos simplemente explican que han operado de algún modo, sin hacer referencia a cifras (fig. 4.8). En ocasiones, para poder asignar el valor a esta categoría, ha sido útil analizar las producciones de un alumno en diferentes cuestiones.


3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ +\ 64 \\ \hline 184 \end{array}$$ amigos

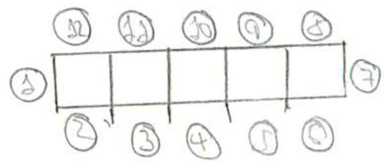
lo he sacado sumando,

Figura 4.8. Ejemplo de operación que no implica el uso de patrones de A7 para la Cuestión 3

Uso de cuestiones anteriores:

En ocasiones, los alumnos aluden a resultados obtenidos o estrategias utilizadas en cuestiones anteriores, bien sea dando cuenta de la recursividad de las relaciones, o porque la cuestión hace referencia a un resultado que el alumno ya había obtenido. Mostramos un ejemplo del uso de este tipo de estrategia en la figura 4.9.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Solución= Son 5 mesas y lo se porque he hecho en la actividad anterior (5)

Figura 4.9. Ejemplo de uso de cuestiones anteriores de A5 para la Cuestión 7

Repetición de razonamientos de tareas previas:

Los alumnos responden a cuestiones que buscan la expresión de la generalización repitiendo las instrucciones dadas en el enunciado general de la prueba. Un ejemplo es el que mostramos en la figura 4.10.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Diciendole que son 3 mesas juntas en forma de fila y que solo se pueden sentar los niños en los lados en las esquinas no.

Lo he pensado esto porque es como más o menos viene en el problema, ~~porque~~ así me he enterado, yo lo explicaría así.

Figura 4.10. Ejemplo de repetición de las condiciones del ejemplo genérico de A1 para la Cuestión 5

Categorías sobre representaciones

Para clasificar las representaciones de los alumnos usaremos los tipos que definíamos en el marco teórico de esta memoria: (a) Verbales, (b) Simbólicas, que incluyen numéricas y algebraicas, (c) Pictóricas, (d) Tabulares y (e) Múltiples.

Señalamos algunas subcategorías que distinguimos dentro de las representaciones pictóricas y tabulares. En las representaciones pictóricas, consideramos las siguientes:

- **Hacen dibujo completo:** dibujo correspondiente en número de mesas y niños y en su disposición con el presentado en el ejemplo genérico. Un ejemplo es el mostrado en la figura 4.11.

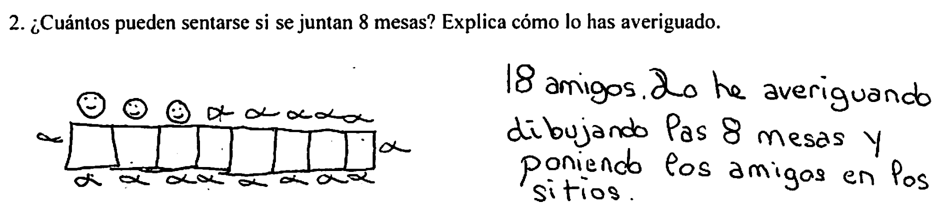


Figura 4.11. Ejemplo de dibujo completo de A18 para la Cuestión 2

- **Hacen dibujo incompleto**: dibujo que se corresponde en la disposición de mesas y niños al del ejemplo genérico, pero al que le falta algún elemento. Lo ejemplificamos en la figura 4.12.

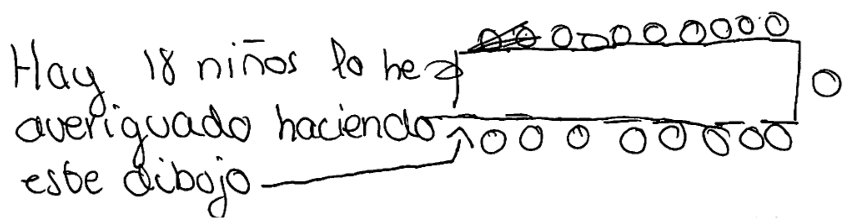
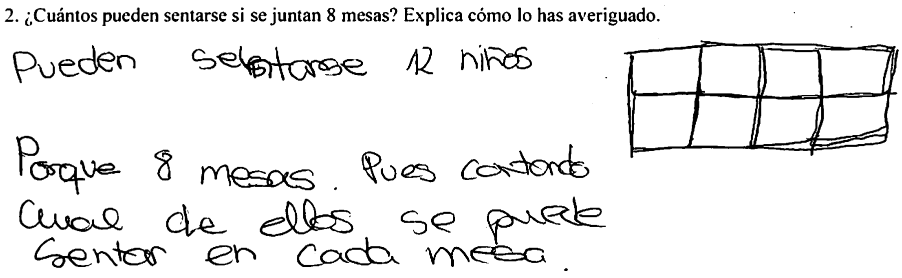


Figura 4.12. Ejemplo de dibujo incompleto de A8 para la Cuestión 2

- **Hacen dibujo que no se corresponde con el ejemplo genérico:** el dibujo difiere en la disposición de las mesas y/o los niños respecto al presentado en el ejemplo genérico. Mostramos un ejemplo en la figura 4.13.


2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Pueden sentarse 12 niños

Porque 8 mesas. Pues contando cual de ellos se puede sentar en cada mesa.

Figura 4.13. Ejemplo de dibujo que no se corresponde con el ejemplo genérico de A11 para la Cuestión 2

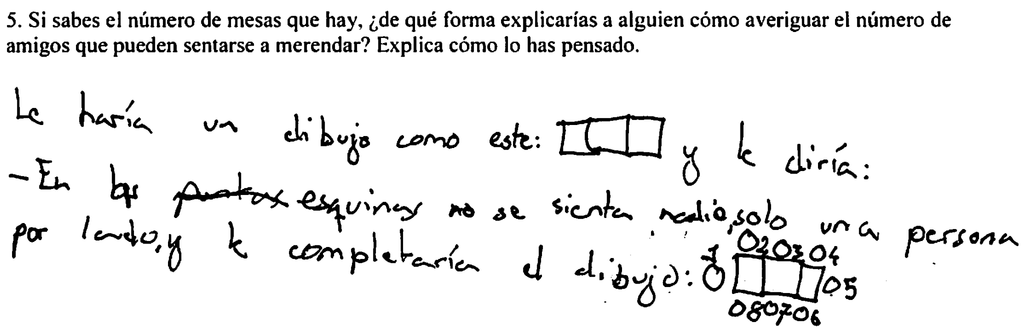
En las representaciones tabulares tendremos en cuenta una categorización adaptada del trabajo de Brizuela y Lara-Roth (2002), diferenciando entre tablas en las que los alumnos usan etiquetas (con información explícita según Brizuela y Lara-Roth), o tablas en que los alumnos no usan etiquetas (información implícita según las autoras).

Categorías sobre el proceso de generalización:

Teniendo en cuenta las definiciones de generalización presentadas en el marco teórico, establecemos las siguientes categorías para clasificar las respuestas según se refieran a casos particulares o estén expresadas de un modo general:

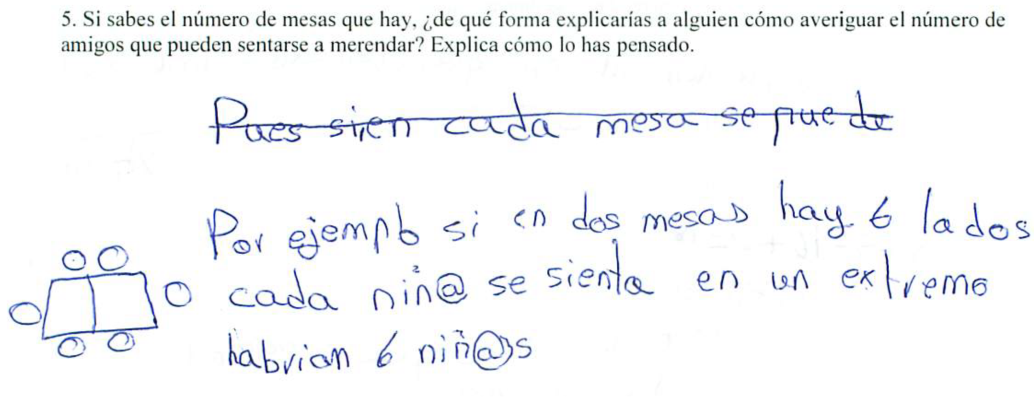
Casos particulares:

El alumno responde con una expresión que se refiere a un caso particular. Pueden darse dos situaciones, ya consideradas por Pólya (1966) y retomadas por Cañadas (2007), que hemos relacionado con dos subcategorías: (a) casos particulares anteriores (GPA), ya trabajados en alguna cuestión anterior en la tarea (Figura 4.14), y (b) casos particulares nuevos (GPN), caso en que el alumno añade casos particulares de su propia producción (Figura 4.15).


5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Le haría un dibujo como este: y le diría:
- En las ~~puntas~~ esquinas no se sienta nadie, solo una persona por lado, y le completaría el dibujo: 01 02 03 04 05 06 07 08

Figura 4.14. Ejemplo de referencia a casos particulares anteriores de A12 para la Cuestión 5


5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

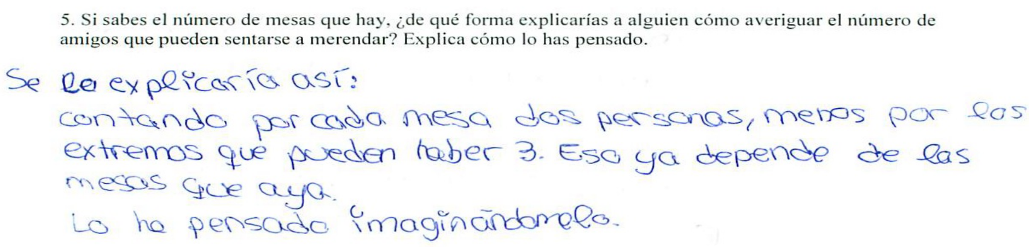
~~Pues si en cada mesa se pue de~~

Por ejempb si en dos mesas hay 6 lados cada niñ@ se sienta en un extremo habrian 6 niñ@s

Figura 4.15. Ejemplo de referencia a un caso particular nuevo de A17 para la Cuestión 5

Caso general:

El alumno responde a la cuestión con una expresión que no se refiere a un caso particular, dando muestra de capacidad de generalización, estableciendo una norma o patrón general que es aplicable a cualquier caso. Mostramos un ejemplo en la figura 4.16.


5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Se la explicaría así:
contando por cada mesa dos personas, menos por los extremos que pueden haber 3. Eso ya depende de las mesas que aya.
Lo he pensado imaginandomelo.

Figura 4.16. Ejemplo de referencia a un caso general de A16 para la Cuestión 5

Categorías sobre la interpretación de n:

Cuando los alumnos responden a cuestiones en las que se les introduce la *n*, como ocurre en la Cuestión 6, hemos identificado las siguientes categorías que permiten describir las producciones de los alumnos:

Sustitución de un número por n:

El alumno responde con una expresión en la que sustituye el número de mesas y/o niños por la letra *n*. Esto está ejemplificado con la figura 4.17.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Se pueden senta n niños y hay n mesa.

Al principio no lo he entendido pero Edu me lo ha explica y ya me he enterado que en vez de poner un numero hay que poner n.

Figura 4.17. Ejemplo de sustitución de un número por *n* de A1 para la Cuestión 6

Sustitución de una palabra por n:

El alumno responde con una expresión en la que sustituye la palabra mesas y/o la palabra niños por la letra *n.* Un ejemplo es el caso mostrado en la figura 4.18

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

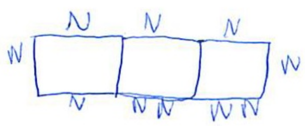
Hay 3 n y hay 8 ~~amigos~~ n.

Figura 4.18. Ejemplo de sustitución de una palabra por *n* de A4 para la Cuestión 6

Representación pictórica con n:

El alumno hace un dibujo (similar o no al presentado en el ejemplo genérico) en el que sustituye los elementos correspondientes a las mesas y/o niños por letras *n.* Mostramos un ejemplo en la figura 4.19.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

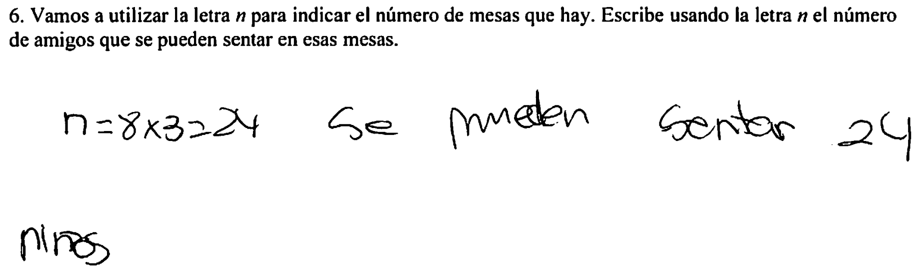


lo he aberiguado, porque si la mesas son anchas se pueden sentar mas gente

Figura 4.19. Ejemplo de representación pictórica de *n* de A14 par la Cuestión 6

Operación con n:

El alumno responde con una expresión en la que iguala la letra *n* con el resultado de una operación. En la figura 4.20 se puede observar un ejemplo.


6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

n=8x3=24 se pueden sentar 24

ninos

Figura 4.20. Ejemplo de operación con *n* de A11 para la Cuestión 6

No sabe/no responde:

Encontramos casos en los que los alumnos no responden a la cuestión. En ocasiones expresan no saber hacerlo.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En el presente capítulo analizamos los datos obtenidos tras la recogida de información previamente descrita. La estructura y el contenido de la prueba, principal instrumento de recogida de información, permite realizar tres posibles análisis: (a) un estudio individual de cada una de las diez cuestiones, (b) un análisis comparativo de los resultados del grupo obtenidos en diferentes cuestiones y (c) un estudio individualizado de cada alumno, atendiendo a su actuación a lo largo de toda la prueba. Por la brevedad del tiempo y la extensión permitida en la memoria, nos centramos en el análisis individual de cada una de las diez cuestiones de la tarea propuesta en la prueba. Consideramos los otros dos análisis como posibles líneas de continuación de esta investigación.

Para preservar la identidad de los alumnos que realizaron la prueba, les asignamos por orden alfabético un número, del 1 al 20. Para el análisis de resultados en esta memoria, clasificamos las producciones de los 20 alumnos asignando a cada uno de ellos una etiqueta que consta de la letra A acompañada de un número del 1 al 20 (A1, A2, A3… A20). Los alumnos fueron ordenados alfabéticamente para asignarles sus números.

ESTRUCTURA DE PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para presentar el análisis de las producciones de los estudiantes, hemos elaborado unas tablas de doble entrada, una para cada cuestión de la prueba. Estas tablas permiten observar, por un lado, en las filas, las estrategias usadas por los alumnos para responder a la cuestión y las representaciones empleadas en las respuestas en las columnas. Por otro lado, en las columnas, recogemos las representaciones empleadas en las respuestas[10]. Adicionalmente, en algunas cuestiones que lo precisan, presentamos indicaciones que hacen referencia a la corrección de las respuestas de los alumnos, a la generalización, o a otros detalles que consideramos relevantes a la hora de analizar los resultados atendiendo a los objetivos de investigación del mismo. En cada celda incluimos los alumnos (según los numerales que les hemos asignado) cuya producción a una cuestión se corresponde con una categoría determinada. Por ejemplo un 5 en una celda, indica que el alumno 5 (abreviado como A5) se corresponde con el valor de fila y columna con el que se corresponde la celda.

Cada tabla tiene una fila y una columna para registrar el número total de alumnos cuya respuesta aparece etiquetada en cada categoría. Dada la posibilidad de que las respuestas de algunos alumnos queden incluidas en varias categorías al mismo tiempo, la suma total de los valores de cada fila de una misma tabla, puede no corresponder con el número de alumnos que respondieron a la cuestión. Igual ocurre con las columnas.

Existen algunas excepciones en el modo de presentación de las tablas que iremos aclarando conforme presentemos los resultados.

ANÁLISIS POR CUESTIONES

Presentamos el análisis de las producciones de los alumnos a las cuestiones propuestas en la prueba, comenzando con los resultados que hacen referencia a las estrategias utilizadas (por filas). A continuación nos centramos en los tipos de respuesta y los sistemas de representación empleados (por columnas). En tercer lugar analizamos los tipos de repuesta y las estrategias conjuntamente con los sistemas de representación (filas y columnas). Finalmente, prestamos atención a peculiaridades observadas en las producciones de los estudiantes que son relevantes según los objetivos de investigación de este trabajo.

[10] No recogemos en una columna las representaciones múltiples, considerando que estas se darán si un alumno está incluido en dos o más columnas correspondientes a varios tipos de representación en una misma cuestión.

Cuestión 1

¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Las respuestas de los alumnos para esta cuestión están recogidas en la tabla 4.1. En dicha tabla las columnas aluden al tipo de respuesta, ya que en esta cuestión no se da una variedad suficiente de representaciones como para poder clasificarlas.

Tabla 5.1. Resultados de las producciones en la Cuestión 1

			Tipo de respuesta		Nº total
			Correcta	Incorrecta	
Estrategia	Conteo		1, 2, 7, 8, 14, 16, 19 y 20		8
	Patrón	N+N+2	9 y 17		2
Respuesta Directa			3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15 y 18		10
Número total alumnos			20	0	20

Como se observa en la tabla 5.1, todos los alumnos (20) responden correctamente a la Cuestión 1. La mitad de ellos (10) indican directamente el resultado. La otra mitad añaden a su respuesta una explicación. En el caso de 8 de ellos, utilizan el conteo para dar su respuesta. Otros dos alumnos (A9 y A17), expresan el resultado como una suma, diferenciando que el número de niños se obtiene sumando los 2 de los extremos con los 6 de los lados de las mesas.

Cuestión 2

¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Las respuestas de los alumnos a la Cuestión 2 quedan registradas en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. Análisis de las respuestas a la Cuestión 2

			Representación					Nº total
			RP			RV	RN	
			DC	DI	DNP			
E	EC		1, 6_1, **15**, 18		**11**	1, 6_1, **11**, **15**, 18		5
	EP	Mx8				**2**, **4**	**2**, **4**, **7**	3
		Mx2+2	5, 20			5, 13, 16, 20	13, 16	4
		M+M+2	9			9, 17	17	2
		Mx4				**19**	**19**	1
RD			3, 10, 12	8		3, 8, 10, 12, **14**		6

Nº total	10	1	1	19	7	20

[1]El alumno no menciona los niños de los extremos.
Se resaltan en negrita las respuestas incorrectas.
E: Estrategia. EC: Estrategia de conteo. EP: Uso de patrón. RD: Respuesta directa. RP: Representación pictórica. DC: Dibujo completo. DI: Dibujo incompleto. DNP: Dibujo que no corresponde con el patrón. RV: Representación verbal. RN: Representación numéricaM: Número de mesas

Como puede observarse en la tabla 5.2, todos los alumnos (20) responden la cuestión. El caso más frecuente es la respuesta directa (6 alumnos). Identificamos diversas estrategias en las producciones. La más usada es la de contar uno a uno los niños sobre el dibujo. El resto de estrategias identificadas implican el uso de patrones, distinguiéndose cuatro patrones diferentes, dos de los cuales conducen a respuestas correctas: M+M+2 y Mx2+2. Este último es el patrón más utilizado (4).

En cuanto a las representaciones que utilizan los alumnos, 12 utilizan la representación pictórica. Como recogemos en la tabla 4.2, 10 alumnos hacen un dibujo completo y correcto para la situación propuesta. A8, que realiza el dibujo incompleto (ver figura 4.12), responde bien a la cuestión, y el único elemento ausente en su representación son las líneas que delimitan las mesas entre sí. Por otra parte, A11 coloca las mesas en su dibujo en otro orden (ver figura 4.13), dando una respuesta correcta para ese orden que él asigna, pero no para el que se le pide. Todos los alumnos que han hecho el dibujo completo responden bien a la pregunta salvo A15, que responde que pueden sentarse 64 niños (figura 4.4).

La representación verbal es la más utilizada, ya que 19 alumnos (todos menos A7, que usa representación numérica) la usan para dar su respuesta, en la mayoría de los casos como representación múltiple, acompañada de un dibujo o de cálculos. Cuando los alumnos hacen uso combinado de varias representaciones, lo cual ocurre en 18 casos, combinan representaciones verbales y pictóricas, o verbales y numéricas, pero nunca pictóricas y numéricas.

Destacamos de la consideración conjunta de la información, que todos los alumnos que han usado la estrategia del conteo han realizado un dibujo. Además, de las 7 respuestas incorrectas, solo A15 y A11 han realizado dibujo.

Cuestión 3

Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

En la tabla 5.3 pueden observárselos datos correspondientes a las respuestas de los alumnos para esta cuestión.

Tabla 5.3. Análisis de las respuestas a la Cuestión 3

			Representación			Nº total
			RP / DI	RV	RN	
E	EP	Mx2+2	12	3, 8, 10, 12, 13, 16, 17, 20	3, 8, 12, 13, 16, 17, 20	8
		M+M+2		9	9	1
		Mx2		**14**	**14**	1
		Mx3		**1, 2**	**1, 2, 11**	3
		Mx4		**19**	**19**	1
		Mx8		**4**	**4**	1
		(M:3)x8		**5**	**5**	1
		M:2+2	**6**	**6**	**6**	1
	EO	120+64			**7**	1
RD						0
Nº Total			1	16	17	18

Se resaltan en negrita las respuestas incorrectas. E: Estrategia. EP: Uso de patrón. EO: Uso de operaciones. RD: Respuesta directa. RP: Representación pictórica. DI: Dibujo incompleto. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. M: Número de mesas.

El total de alumnos que responden a la Cuestión 4 es 18. Todos salvo uno de ellos (A7 responde con una operación que no implica el uso de patrón) utilizan alguna estrategia basada en el uso de patrones. El patrón más usado es el Mx2+2 (8 alumnos). El patrón M+M+2 es usado por un solo alumno (A9). El resto de patrones usados en las respuestas dan lugar a respuestas erróneas.

En 6 casos, los alumnos usan un patrón con el que multiplican la cantidad de mesas por algún número (2, 3, 4 u 8). Por otra parte, A5 que opera (120:3)x8 dice que divide entre tres "para ponerlo como en la primera pregunta" y que multiplica por 8 "por las personas que hay en la primera pregunta". A6 utiliza la operación 120:2+2. Su razonamiento lleva a una respuesta válida, e incluso la explicación que da apoyándose en un dibujo, pero incurre en el error de dividir entre dos en lugar de multiplicar por dos.

Al margen del uso de patrones, A7 suma 120 y 64 y no da ninguna explicación al respecto (ver figura 4.8).

En esta cuestión no encontramos ninguna respuesta directa.

Respecto a las representaciones usadas, solo A6 y A12 hacen un dibujo (representación pictórica) y, en ambos casos, es incompleto. En el caso de A6 (ver figura 5.1), ofrece el dibujo como apoyo en la explicación de la respuesta que da basada en cálculo y operaciones., Sin embargo, A12 empieza usando el dibujo como principal representación, como hacía en la cuestión anterior pero, al advertir la inviabilidad de dibujar 120 mesas, opta por una estrategia de cálculo numérico. El resto de alumnos no realiza ningún tipo de dibujo.

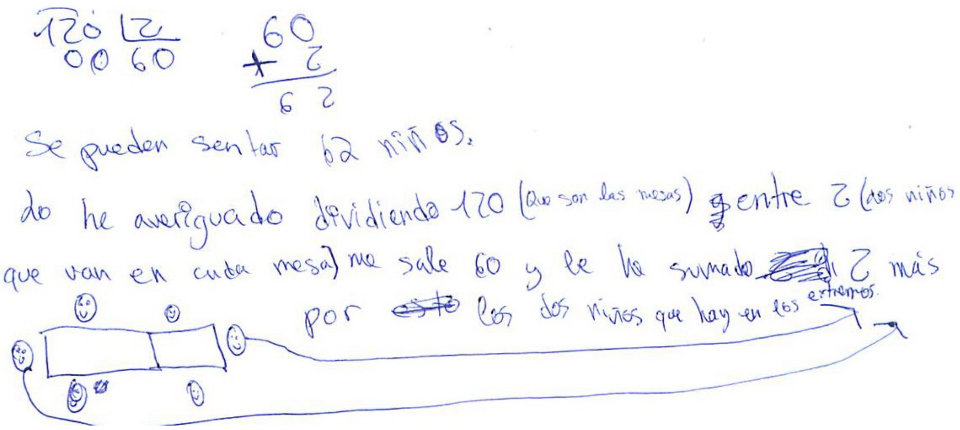


Figura 5.1. Respuesta a la Cuestión 3 de A6

La mayoría de alumnos (15) utilizan una representación múltiple en su respuesta, combinando las representaciones verbal y numérica. A12 y A6 añaden además la representación pictórica. A7 y A11 utilizan únicamente la representación numérica mientras que A10 usa solo la representación verbal.

La mitad de los alumnos que han respondido (9), lo han hecho correctamente, usando una variedad de dos patrones en las respuestas correctas: Mx2+2 (8 alumnos) y M+M+2 (A9).

La respuesta más dada incluye el patrón Mx2+2 y una representación múltiple en la que combinan las representaciones verbal y numérica (7 alumnos).

Cuestión 4

Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Los datos correspondientes a la Cuestión 4 se muestran en la tabla 5.4. En las filas hacemos referencia a la generalización expresada por los alumnos, recogiendo los casos que usan para la construcción de una tabla de datos, y si esos datos son o no correctos, es decir, si los casos particulares que presentan para número de mesas y número de niños guardan relaciones correctas entre sí.

Tabla 5.4. Análisis de las respuestas a la Cuestión 4

			Representaciones								Nº Total
			RT					RV	RN	RP	
				RTE		RTN					
			NC	DC	DI	DC	DI				
CP	CPA		*1*	1				18	11	19	4
			3	3				6			2
	CPN	CPNC	*4*	12[1]	10[1]						2
			5		2[1]						1
			6			8[1]	14				2
		CPNN	*1*							16	1
			4	20	7						2
			5		13						1
Nº total				4	4	1	1	2	1	2	15

[1]Los alumnos expresan posibilidad de continuación en su tabla. CP: Casos particulares. CPA: Casos particulares anteriores. CPN: Casos particulares nuevos. CPNC: Consecutivos. CPNN: No consecutivos RT: Representación tabular. RTE: Representación tabular con etiquetas. RTN: Representación tabular sin etiquetas. NC: Número de casos. DC: Datos correctos. DI: Datos incorrectos. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica

Un total de 15 alumnos responden a esta cuestión. Nueve de ellos introducen casos particulares nuevos, mientras que seis organizan en la tabla los casos particulares que habían trabajado en las cuestiones anteriores.

Hay una gran variedad de representaciones en las respuestas a esta cuestión. Diez alumnos hacen una tabla (representación tabular), 2 (A6 y A18) ofrecen una representación verbal, 2 (A16 y A19) representan de forma pictórica, y solo A11 usa una representación numérica. De los 10 alumnos que usan una representación tabular, la mitad presentan una tabla con datos correctos (ver ejemplo en la figura 5.2), mientras que la otra mitad exponen datos erróneos en la tabla (ver ejemplo figura 5.3).

Figura 5.2. Representación a la Cuestión 4 de A12

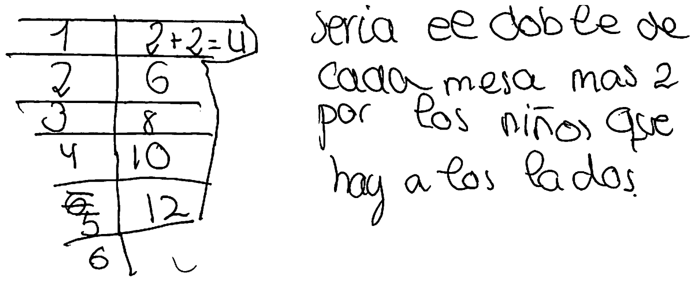


Figura 5.3. Respuesta a la Cuestión 4 de A8.

Las respuestas incorrectas solo se dan entre los alumnos que introducen nuevos casos particulares (8 alumnos).

Cuatro alumnos (A2, A8, A10 y A12) dan a sus tablas una posibilidad de continuación (ver ejemplo en figura 5.3), escribiendo “etcétera” al final o añadiendo una explicación verbal. Como se observa en la tabla 5.4, en todos los casos en que los alumnos muestran tablas con posibilidad de continuación, estas contienen casos particulares nuevos y consecutivos.

Cuestión 5

Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

En la tabla 5.5 quedan recogidos los datos correspondientes a las respuestas de los alumnos a la cuestión 5.

Tabla 5.5. Análisis de las respuestas a la Cuestión 5.

			Generalización y Representaciones								Nº total
			CG				CP				
			RV	RN	RP	RA	RV	RN	RP	RA	
E	EP	Mx2+2	3, 10, 13			3	5, 9, 20		9		6
		M+M+2					14				1
		(M-2)x2+2x3	16								1
		Mx3	2								1
		M:2	6								1
	EO	Sumando	7								1
		Dividiendo	4, 8								2
		3x8						11			1
	ERR		18, 19				1, 12		12		4
RD							17		17		1
Nº total			11	0	0	1	7	1	2	0	19

E: Estrategias. EP: Uso de patrón. EO: Uso de operaciones. ERR: Repite razonamientos. RD: Respuesta directa. CG: Caso general. CP: Caso particular. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica. RA: Representación algebraica. M: Número de mesas.

Como se puede observar en la tabla 5.5, 19 alumnos responden a esta cuestión. En cuanto a las estrategias utilizadas, 10 alumnos usan algún patrón en su respuesta siendo el patrón apropiado y completo Mx2+2 el más utilizado (6). Otros dos patrones apropiados y completos que se utilizan en esta cuestión son M+M+2 (A14) y (M-2)x2+2x3 (A16). Se da el uso de otros dos inapropiados como son Mx3 (A2) y M:2 (A6).

Cuatro alumnos utilizan una operación que no muestra evidencia sobre el uso de patrones. Por otra parte, cuatro alumnos (A 1, A12, A18 y A19) repiten las condiciones ya descritas en el enunciado. A17 ofrece una respuesta directa, sin dar explicaciones que puedan hacernos saber cómo ha llegado a ella.

Respecto a la generalización en las respuestas, 11 alumnos responden con una explicación general, mientras que 8 aluden a casos particulares.

En cuanto a las representaciones, la verbal es la más común, ya que se da en 18 casos (4 como parte de representaciones múltiples). A11 solo muestra una representación numérica. Las representaciones pictóricas se dan en tres casos (A9, A12 y A17) siempre en combinación con las verbales. Por último, el A3 utiliza un interrogante para referirse al número de mesas (ver figura 5.4) utilizando una representación (múltiple) verbal y algebraica.

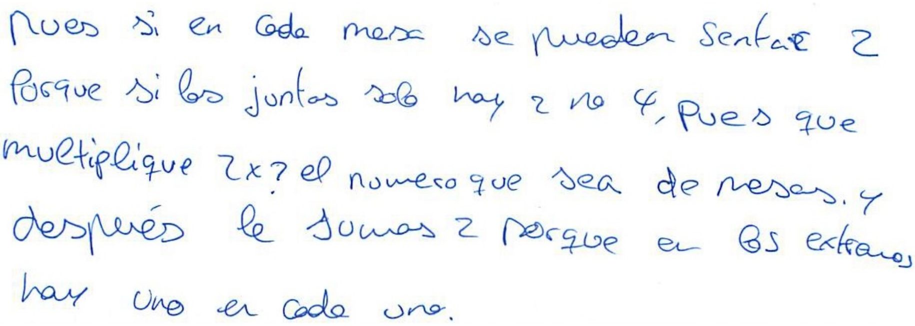

Pues si en cada mesa se pueden sentar 2
Porque si los juntas solo hay 2 no 4, Pues que
multiplique 2x? el numero que sea de mesas, y
después le sumas 2 porque en los extremos
hay uno en cada uno.

Figura 5.4. Respuesta a la Cuestión 5 de A3.

Cuestión 6

Vamos a utilizar la letra n *para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra* n *el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.*

La tabla 5.6 recoge las respuestas de los alumnos a la Cuestión 6.

Tabla 5.6. Análisis de las respuestas a la Cuestión 6

		Generalización y Representaciones									Nº total
		CG	CP								
			CPE				CPN				
		RV	RV	RN	RP	RA	RV	RP	RT	RA	
I	Sustituye número de niños por *n*	1									1
	Sustituye número de mesas por *n*	1	20				8				3
	Sustituye la palabra mesas por *n*		4, 5, 20								3
	Sustituye la palabra niños por *n*		4, 5								2
	Representa los niños mediante *n*		14		2, 12, 14			10, 13	13	10	5
	Representa las mesas mediante *n*				7			10,	13	10	3

								13			
	n como resultado de una operación			11		11					1
Nº total		1	4	1	4	1	1	2	1	1	12

I: Interpretación de *n*. CG: Caso general. CP: Caso particular. CPE: Usa el ejemplo como caso particular. CPN: Usa un caso particular distinto al ejemplo. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica. RA: Representación algebraica. RT: Representación tabular

Un total de 12 alumnos contestó a la Cuestión 6. Atendiendo a las diferentes interpretaciones de la letra *n* que han llevado a cabo los alumnos, todos la utilizan para sustituir algún elemento en una expresión, ya sea esta expresión numérica o verbal. En primer lugar encontramos los alumnos que sustituyen algún número (de mesas o de niños) por la letra *n*. A1, expresa con la letra *n* tanto el número de mesas como de niños (ver figura 4.17), y además no se refiere a ningún número concreto, por lo que lo ubicamos en el caso general.

En segundo lugar están los alumnos (A4, A5 y A20) que en sus expresiones verbales, sustituyen las palabras "mesas" y/o "niños" por la letra *n*. A20 ofrece una explicación completa de cómo averiguar el número de niños sentados en 3 mesas, pero cada vez que se refiere a estas utiliza la letra *n*: "hay 3 *n*... multiplico 2 por *n*… las *n* de los extremos…". En algunas ocasiones utiliza *n* como símbolo para sustituir a un número, pero por lo general lo usa para sustituir a la palabra mesas, por lo que lo incluimos en ambas categorías.

En el siguiente grupo de alumnos (7), están incluidos los que utilizan la letra *n* para sustituir a las mesas o a los niños en una representación pictórica. Aquí podemos distinguir dos tipos de representaciones: las que siguen el formato del ejemplo genérico (4) (ver figura 4.19), y las que constan de letras *n* dibujadas de forma consecutiva (3) (ver figura 5.5).

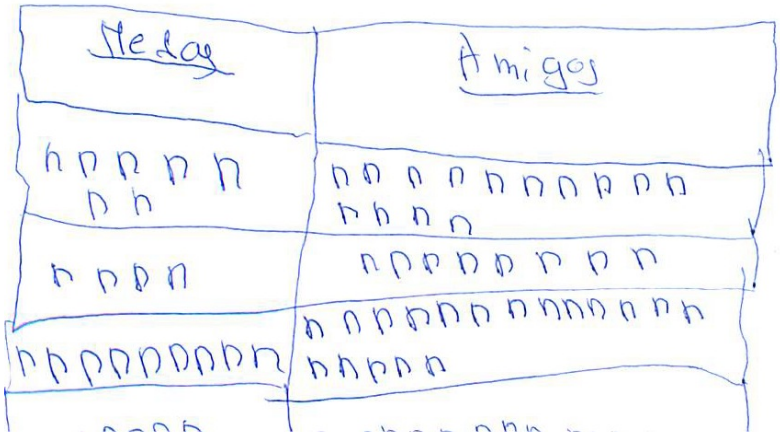


Figura 5.5. Respuesta a la Cuestión 6 de A13.

El último caso es el del A11 (ver figura 4.20), que presenta la letra *n* como resultado de la operación 3x8, escribiendo *n*=2x8=24.

Las respuestas de los alumnos están clasificadas en las columnas según su generalidad o particularidad. Solamente A1 parece utilizar la letra *n* para referirse a cualquier número de mesas (ver figura 4.17). El resto de alumnos se basa en uno o varios casos particulares para responder a la cuestión. En primer lugar, diferenciamos los que se basan en el caso ofrecido en el ejemplo (8 alumnos), y en segundo lugar los que se basan en otros casos particulares (A8, A10 y A12).

En cuanto a las representaciones, la verbal y la pictórica son las más utilizadas (5). La representación verbal aparece como representación múltiple junto a la pictórica en la respuesta de A14, mientras que la pictórica aparece a su vez combinada con las representaciones tabular (A13) y algebraica (A10). Por su parte, A11 es el único que utiliza una representación numérica.

También podemos considerar el carácter algebraico de algunas representaciones, como la de A10, que expresa en un momento dado una suma de letras *n*, o la de A11 que utiliza la letra *n* para identificar el resultado de una operación. Siempre aparecen combinadas con otras representaciones (algebraica y pictórica en A10, y algebraica y numérica en A11) conformando representaciones múltiples. Por otra parte, A13 es el único que utiliza una representación tabular (ver figura 4.4).

Cuestión 7

¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Los resultados de la Cuestión 7 se organizan en la tabla 5.7.

Tabla 5.7. Análisis de las respuestas a la Cuestión 7

			Representaciones			Nº total
			RP	RV	RN	
E	EC		1, 15	1, **2**, 15		3
	EP	Mx2+2	5, 20	10, 20	10, 20	3
		M+M+2		8, 17	17	2
		(N-2):2	18	18		1
		N-2	**6**	**6**		1
		N:3		**4**	**4**	1
		N:2-2		**13**	**13**	1
	EO	8+4		**7**		1
		10+2		3, 16	16	2
		Dividiendo	9	9		1
	ECA		5	12, 5		2
RD			19	**11, 14**		3
Nº total			8	19	6	20

Se resaltan en negrita las respuestas incorrectas. E: Estrategia. EC: Uso del conteo. EP: Uso de patrones. EO: Uso de operaciones. ECA: Uso de casos anteriores. RD: Respuesta Directa. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica. M: Número de mesas. N: Número de niños

En la Cuestión 7 todos los alumnos responden, como puede observarse en la tabla 4.7. Se da una gran variedad de estrategias. Las más usadas son el conteo (A1, A2 y A15) y el uso del patrón Mx2+2 (A5, A10 y A20). Se dan otros patrones apropiados y completos como M+M+2 (A8 y A17), y (N-2):2 (A18). También encontramos un patrón apropiado pero incompleto, N-2, que se da en una ocasión (A6).

Por otra parte, cuatro alumnos (A3, A7, A9 y A16) realizan operaciones que no implican el uso de patrones. Además, hay dos alumnos (A5 y A12) que se basan en cuestiones anteriores para responder. Tres alumnos (A11, A14 y A19) dan respuestas directas.

La representación más utilizada en esta cuestión es la verbal ya que todos los alumnos a excepción de A19, que realiza únicamente una representación pictórica. La representación verbal la utilizan por si sola (7) o bien como parte de una representación múltiple (12).

La representación pictórica es usada por 8 alumnos, de los cuales solo uno (A19) la usa como único recurso. El resto (siete alumnos) la usan como parte de una representación múltiple. Seis alumnos utilizan la representación numérica, siempre como parte de una representación múltiple. Se da un caso (A20) en el que la respuesta es una representación múltiple compuesta por los 3 tipos (verbal, pictórica y numérica) (ver figura 5.6).

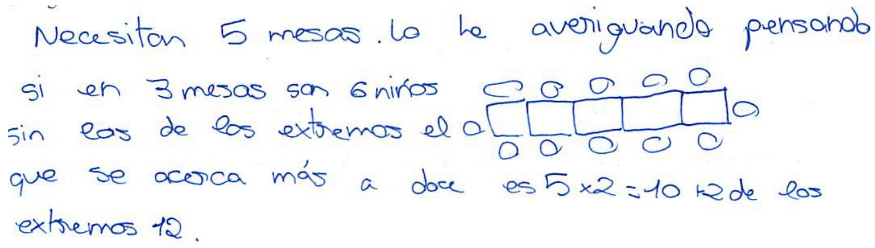


Figura 5.6. Respuesta a la Cuestión 7 de A20

Cuestión 8

¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Los resultados correspondientes a la Cuestión 8 se organizan en la tabla 5.8.

Tabla 5.8. Análisis de las respuestas a la Cuestión 8

			Representaciones			Nº total
			RP	RV	RN	
E	EC		19			1
	EP	Mx2+2		10	10	1
		N:2-1		3	3	1
		(N-2):2		20	20	1
		N-2		**17**	**17**	1
		N:2		**6**, **8**, **15**	**6**, **8**, **15**	3
		N:2-2	**12**	**13**, **12**	**12**, **13**	2

		N:2+2		16		1
		N:8		**4**	**4**, **7**	2
		N:3		**1**	**1**, **4**	2
		(N:2)x2x2		**5**	**5**	1
	EO	58x3		**11**	**11**	1
Nº total			2	14	14	16

Se resaltan en negrita las respuestas incorrectas. E: Estrategia. EC: Uso del conteo. EP: Uso de patrones EO: Uso de operaciones. RP: Representación pictórica. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. M: Número de mesas. N: Número de niños

Como se observa en la tabla 5.8, 16 alumnos responden a esta cuestión. Solo un alumno (A19) utiliza el conteo como estrategia. El uso de algún patrón se da en 14 casos, usando los alumnos patrones apropiados y completos como Mx2+2 (A10), N:2-1 (A3) y (N-2):2 (A20); patrones apropiados pero incompletos como N-2 (A17) y N:2 (A6, A8 y A15); y cinco patrones inapropiados que utilizan un total de 7 alumnos. A4 usa dos de estos patrones inapropiados en su respuesta: N:8 y N:3 (ver figura 4.12). Por otra parte, el alumno 11 utiliza una operación que no pone de manifiesto ningún patrón.

En cuanto a las representaciones, encontramos 2 alumnos que usan una representación pictórica (A12 y A19). Las representaciones verbales son usadas en 14 ocasiones, aunque solamente A16 la utiliza sin acompañarla de alguna otra (numérica o pictórica). Lo mismo ocurre con las representaciones numéricas, usadas por 14 alumnos, pero solamente sin estar acompañada de otro tipo en un caso (A7). La combinación que más se da en las representaciones múltiples es la de verbal y numérica (12).

Cuestión 9

Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Las respuestas de los alumnos a la Cuestión 9 quedan recogidas en la tabla 5.9

Tabla 5.9. Resultados de las producciones en la Cuestión 9.

			Generalización y Representaciones					Nº total
			CG		CP			
			RV	RA	RV	RN	RP	
E	EC				14, 18			2
	EP	Mx2+2	8		5, 9			3
		(N-2):2	20	20	12		12	2

		N:2-1	13					1
		N-2	17					1
		N:M	6					1
		N:2+2	10, 16					2
		2:M	3	3				1
	EO	58x3				11		1
		Sumando	4					1
	ERR				1			1
	O	OD	2					1
		OH	7					1
Nº total			11	2	6	1	1	18

E: Estrategia. EC: Uso del conteo. EP: Uso de patrones. EO: Uso de operaciones
ERR: Repite el razonamiento del enunciado de la prueba. O: Otras estrategias. OD: Alude al uso de un dibujo. OH: Comenta que lo explicaría "Diciendo lo que ha hecho". CG: Caso general. CP: Caso particular. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica. RA: Representación algebraica. M: Número de mesas. N: Número de niños.

Como puede observarse en la tabla 5.9, ha respondido a la cuestión un total de 18 alumnos. Analizando el uso de estrategias, 2 alumnos (A14 y A18) recurren al conteo. El uso de patrones es la estrategia más recurrida (11) pudiéndose identificar patrones apropiados y completos (Mx2+2, (N-2):2 y N:2-1) usados en un total de 6 casos, un patrón apropiado pero incompleto (N-2) usado en un solo caso (A17), y patrones inapropiados (N:M, N:2+2 y 2:M) usados en 4 casos (A3, A6, A10 y A16). Dos alumnos utilizan operaciones que no implican el uso de patrones (A4 y A11).

Por otro lado, un único alumno (A1) repite las normas enunciadas en la cuestión. Otros dos alumnos utilizan otras estrategias: A2 alude al uso de un dibujo para poder dar la explicación (ver figura 5.7), y A7 comenta simplemente: "explicaría lo que he hecho".

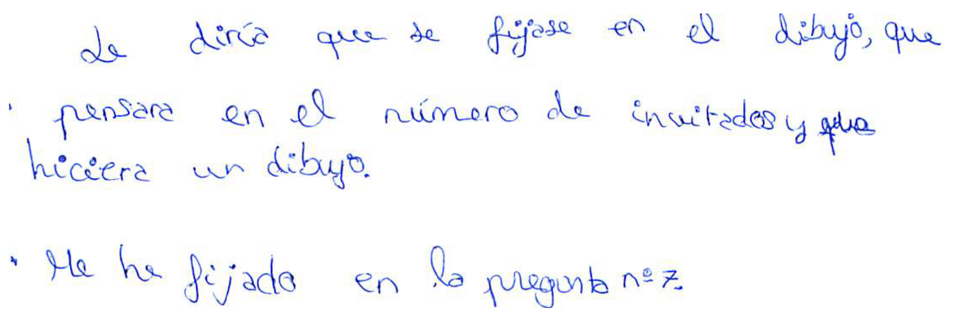


Figura 5.7. Respuesta a la Cuestión 9 de A2

Once respuestas se refieren a un caso general, y siete se refieren a algún caso particular.

Si atendemos a las representaciones usadas, 17 alumnos han usado de algún modo una representación verbal, de los cuales tres (A3, A12 y A20) la utilizan junto con otro tipo en una representación múltiple (verbal y algebraica para A3 y A20, y verbal y pictórica para A12). El alumno 11 es el único que da una respuesta con una representación numérica.

Cuestión 10:

En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Las respuestas de los alumnos para la Cuestión 10 quedan recogidas en la tabla 5.10

Tabla 5.10. Análisis de las respuestas a la Cuestión 10

			Generalización y representaciones					Nº total
			CG		CP			
			RV	RA	RV	RN	RP	
E	EC				12,18		12, 18	2
	EP	(M-2)x2x2 + 2x3x2	16					1
		(Mx2+2)x2	17					1
		Nx2			2, 3, 7, 14	3, 7		4
		2x*n*	8	8				1
		N+N+N			20			1
		Mx2x2	10					1
		N:C	6					1
		Nx3			1			1
Nº total			5	1	8	2	2	13

E: Estrategia. EC: Uso del conteo. EP: Uso de patrones. CG: Caso general. CP: Caso particular. RV: Representación verbal. RN: Representación numérica. RP: Representación pictórica. RA: Representación algebraica. M: Número de mesas. N: Número de niños

En la tabla 5.10 se puede observar como son 13 alumnos los que responden a esta cuestión. En cuanto a las estrategias usadas, A12 (figura 5.8) y A18 utilizan la el conteo. Ambos se refieren al caso particular de 3 mesas y 8 niños (ejemplo genérico). Ambos presentan un dibujo similar al ofrecido al principio de la tarea, pero añaden líneas que simbolizan los cubiertos.

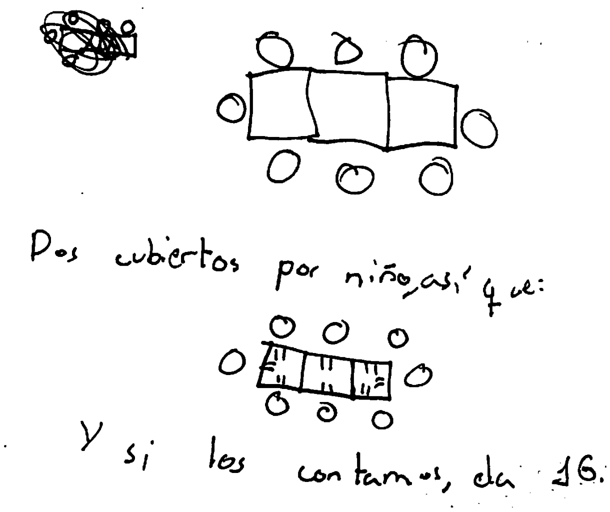


Figura 5.8. Respuesta a la Cuestión 10 de A12

Entre los alumnos que usan patrones, encontramos dos que emplean un patrón apropiado y completo: A16 que usa el patrón (M-2)x2x2 + 2x3x2 y A17 que utiliza el patrón (Mx2+2)x2. La estrategia más frecuente se da en 4 casos (A2, A3, A7 y A14) y es el uso del patrón Nx2. Es un patrón apropiado pero incompleto, porque al darlo los alumnos están partiendo del número de niños, cuando les pedimos que partan del número de mesas. Ningún alumno da la respuesta con el patrón Nx2 para cualquier caso en general.

Por otra parte, A8 responde usando la letra *n* como símbolo (patrón 2x*n*). Comenta que "si hay una mesa con *n*, el doble de *n* es el número de cubiertos que se necesita". También se trata de un patrón apropiado pero incompleto.

Dentro de los patrones apropiados pero incompletos, también se incluye A20 (N+N+N), que utiliza el caso particular del enunciado de la tarea para responder (ver figura 5.9).

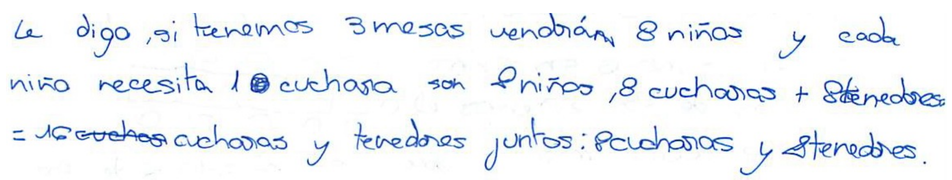


Figura 5.9. Respuesta a la Cuestión 10 de A20

Por último entre los patrones apropiados pero incompletos, A10 que usa el patrón Mx2x2 sí establece una relación entre el número de mesas y el de cubiertos, pero lo hace de forma incompleta. Se dan también patrones inapropiados. A1 centrado en el caso particular, utiliza el patrón Nx3. Por su parte el A6 indica que hay que dividir el número de niños entre el número de cubiertos (patrón N:C).

Cinco alumnos responden de modo general, y ocho lo hacen aludiendo a un caso particular. Los 8 alumnos que usan un caso particular, usan el mismo: 3 mesas y 8 niños.

En cuanto a las representaciones, todos los alumnos utilizan el tipo verbal. Algunos alumnos presentan representaciones adicionales a la verbal, combinadas en representaciones múltiples: A8 usa una representación verbal y algebraica, A3 y A7 usan una representación numérica junto a la verbal, y por último A12 y A18 usan la representación pictórica junto a la verbal.

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Presentamos en este capítulo la discusión de los resultados presentados en el capítulo anterior. Organizamos este capítulo presentando la discusión de los resultados de cada cuestión.

Cuestión 1

Esperábamos que todos los alumnos respondiern correctamente a la cuestión ya que se trata de una cuestión "introductoria", que tiene como apoyo el dibujo del ejemplo y que requiere de estrategias sencillas tales como el conteo. Que se muestre con mucha claridad el dibujo y que en el enunciado de la cuestión no pida que se justifique la respuesta pueden ser motivos para que la mitad de los alumnos den una respuesta directa.

No apreciamos la identificación de ningún patrón dado que todos los alumnos aluden solamente al caso particular. Sin embargo, cabe señalar que 2 alumnos obtienen su respuesta a partir de la suma correspondiente al patrón N+N+2.

Cuestión 2

El número de alumnos que utilizan la representación pictórica es elevado (12). Todos los alumnos que han hecho el dibujo completo, salvo A15, responden adecuadamente. Esto pone de manifiesto que el dibujo es un instrumento útil y eficaz para dar respuesta a esta cuestión.

El caso de A15 (figura 3.4) resulta confuso, ya que reconoce que ha hecho el dibujo y ha contado los niños que pueden sentarse. Sin embargo aunque el dibujo que presenta es correcto, responde que se pueden sentar 64 niños. Esto nos hace pensar en un fallo de concentración.

Todos los alumnos que han usado la estrategia del conteo han realizado un dibujo. En esta cuestión, el conteo era una de las estrategias que podíamos esperar al tratarse de un número pequeño de mesas. Llama la atención, que entre los alumnos que han usado una estrategia basada en el uso de patrones, hay cuatro alumnos que dan respuestas incorrectas y seis correctas. Esto puede ser debido a fallos en la percepción de la situación, o a errores en los cálculos realizados.

De los 8 alumnos que no hacen dibujo, 7 dan respuestas usando patrones, y tan solo uno ofrece una respuesta directa, mientras que ninguno usa la estrategia del conteo. Parece que la respuesta directa o la estrategia del uso del conteo, resultan difíciles de utilizar sin la ayuda de un dibujo.

Llama la atención que 5 de los 7 alumnos que dan respuestas incorrectas, no han realizado dibujos. Parece por tanto que el dibujo y el conteo es la combinación más eficaz al resolver la cuestión. Los casos de respuesta directa no ofrecen evidencia de ninguna estrategia utilizada.

Cuestión 3

Resulta significativo que no encontremos ninguna respuesta directa en esta cuestión. Dado que esta cuestión tiene un nivel de complejidad mayor que las anteriores, esta puede ser una razón para este resultado.

La mitad de los alumnos que responden a la cuestión lo hacen usando un patrón apropiado y completo, que los lleva a obtener una respuesta correcta. Los patrones que conducen a conclusiones erróneas parecen corresponder a no considerar los niños que se sientan en los extremos (Mx2) o contabilizar tres niños por mesa (Mx3), siendo este último el caso más frecuente (A1, A2 y A11).

En cuanto a la generalización, los alumnos no presentan en ningún caso una respuesta aplicable a cualquier número de mesas, sino que siempre se refieren al caso concreto de la cuestión (120 mesas). Resaltamos el hecho de que algunos alumnos, independientemente de que su respuesta sea correcta o incorrecta, argumentan en su respuesta que han "hecho lo mismo que en la cuestión anterior". Esto nos hace conjeturar que estos alumnos están utilizando un patrón, aunque no tenemos evidencias de ello en las producciones a esta cuestión.

Solo dos alumnos realizan una representación pictórica, siendo muy poco frecuente en comparación con la verbal y la numérica. La representación múltiple, combinando verbal y numérica es la mayoritaria.

Cuestión 4

Aun requiriendo una representación tabular, 5 estudiantes utilizan otro tipo de representaciones: verbal, pictórica o numérica. Del total de alumnos que responden (15) nueve introducen casos particulares nuevos, mientras que seis se dedican a organizar en la tabla los casos particulares que se habían tratado en las cuestiones anteriores. También se trata de un resultado interesante dado que en el enunciado solo se les pide que recoja los datos utilizados en otras cuestiones. Las respuestas incorrectas, solo se dan entre los alumnos que introducen nuevos casos (responden con datos erróneos 5 de los 9).

Por otro lado, la mayoría de los alumnos que responden y usan una representación tabular, utilizan etiquetas (8 de 10), seguramente debido a que las tablas que han visto o trabajado anteriormente guarden un formato similar. Algunos alumnos dan a sus tablas una posibilidad de continuación de la secuencia de datos, incluyendo además casos particulares nuevos y consecutivos. Estos resultados ponen de manifiesto el conocimiento de relaciones funcionales entre variables en esta representación.

Cuestión 5

Podemos observar el uso de diferentes patrones en las respuestas de los alumnos, la mayoría ya usados en otras cuestiones. Ocho alumnos utilizan patrones apropiados y completos, siendo Mx2+2 el más frecuente Por tanto casi la mitad de los alumnos que responden (19), han cumplido con las expectativas de respuesta para esta cuestión.

Por otra parte, los cuatro alumnos que repiten las condiciones dadas en el enunciado, parecen no haber entendido el enunciado de la cuestión, respondiendo a cómo se sientan los niños, pero no cómo averiguar el número de niños que pueden sentarse. En cuanto al resto de estrategias, destacamos que la más común es la división (A4, A6 y A8). Esto puede deberse a que no tenían claro que había que hacer, y decidieron aplicar la división porque lo creyeron lo más adecuado, o a cualquier tipo de patrón del que no tenemos evidencias en sus producciones.

En lo que respecta a la generalización, la mayoría ha generalizado. Podemos decir que la generalización en esta cuestión se ha llevado a cabo de manera satisfactoria.

Por otra parte, en cuanto a las representaciones usadas, cabe destacar que los alumnos que han realizado un dibujo (A9 y A12) lo han hecho para explicar casos particulares, ninguno para expresar la generalidad. Por último, A11 es el único que ofrece una representación numérica, y el resto de alumnos ofrezcan representaciones verbales. Parece que la representación verbal les es suficiente para esta cuestión, sin necesidad de recurrir a otro tipo de representación.

Cuestión 6

La cuestión ha sido la menos contestada, creemos que debido a la inclusión de la *n*. A pesar de ello, entre todas las producciones, encontramos gran variedad de representaciones y en algunas reconocemos cierto carácter algebraico.

La mayoría de respuestas (6) están enmarcadas dentro del grupo que usa la *n* en una representación pictórica, resultado que nos pareció sorprendente. Por otro lado, A10 y A11 son los únicos que dan una respuesta de corte algebraico, lo que en principio era el objetivo de la cuestión.

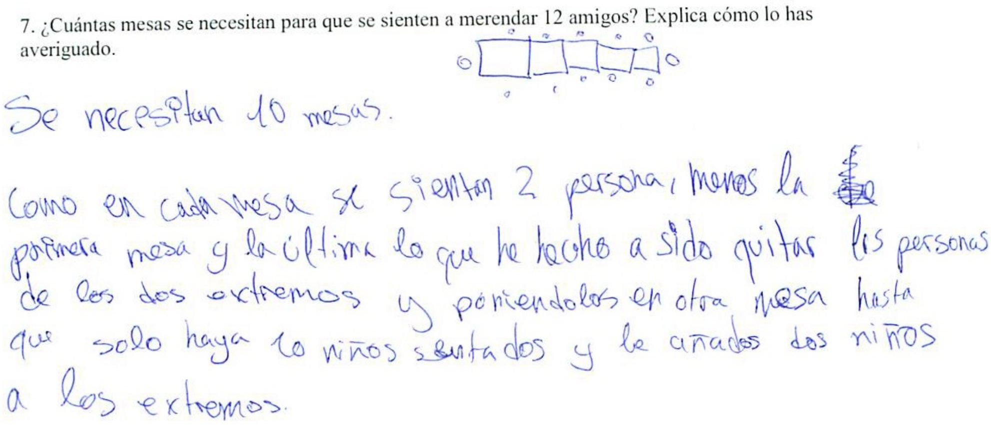
Con todo ello, creemos que la generalización expresada en esta cuestión ha sido muy escasa, ya que solo A1 no hace referencia a un caso particular. No tenemos evidencias de que quisiera referirse a cualquier caso, dado lo escueto de su respuesta. También opinamos se da una gran variedad de representaciones en esta cuestión, debido probablemente a que era la más abierta de las planteadas.

Cuestión 7

Uno de los tipos de respuesta más repetido es la directa (A11, A14 y A19), quizá debido a la posibilidad de resolverla con cálculo mental, por utilizar números pequeños.

Resulta llamativo que de los 6 alumnos que usan patrones apropiados y completos en la cuestión, 5 usen patrones propios de una relación directa (Mx2+2 y M+M+2) y solamente uno (A18) usa un patrón propio de relación inversa ((N-2):2). Sin embargo el resto de patrones (3) están basados en una relación inversa (todos parten del número de niños).

Siete alumnos responden a la cuestión de forma errónea, y es reseñable el hecho de que salvo A6, ninguno de ellos ha hecho un dibujo. Parece que el dibujo siempre ayuda a que la respuesta del alumno sea acertada. El caso de A6 (figura 5.1) es bastante peculiar, ya que hace un dibujo con 5 mesas, pero responde que hay 10 mesas, lo que creemos que puede atribuirse a un despiste.


7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 10 mesas.

Como en cada mesa se sientan 2 persona, menos la primera mesa y la última lo que he hecho a sido quitar los personas de los dos extremos y poniendolos en otra mesa hasta que solo haya 10 niños sentados y le añados dos niños a los extremos.

Figura 5.1. Respuesta a la Cuestión 7 de A6

En esta cuestión los alumnos parecen dar cuenta de que pueden aplicar ciertas normas para averiguar el número de mesas a partir del número de amigos, pero la mayoría aún alude a la relación directa. Muchos de los alumnos prueban por ensayo-error el número de mesas que encaja con 12 niños. Ninguno ha ofrecido una explicación gráfica de eso pero muchos lo han explicado verbalmente.

Cuestión 8

Encontramos 10 patrones diferentes. Entre los alumnos que responden a la cuestión (16), presentan un total de 12 estrategias distintas. A19 es el único que no resuelve la cuestión mediante el uso de cálculos, y utiliza la estrategia del conteo a partir del dibujo que realiza. Esta estrategia parece efectiva ya que es uno de los pocos alumnos (4) que da una respuesta correcta. El resto de alumnos (15) a excepción del A11, que usa como estrategia una operación ajena al uso de patrones, utiliza algún tipo de patrón para responder. La mayoría de estos patrones consideran que el número de niños (58) se divide entre alguna cantidad. Parece que la mayoría de alumnos sabe que el número resultante (el de mesas) ha de ser menor que el número de niños. Sin embargo varios alumnos, utilizan la multiplicación para dar la respuesta, y dan cifras mucho mayores a 58. Pensamos que estos últimos no han entendido bien lo que se les pedía, o han identificado el problema con el caso de relación directa, en el que esa estrategia hubieran sido más adecuadas.

Observamos una tendencia generalizada a usar la división como operación (13). La división entre 3, a pesar de ser una estrategia errónea, se repite en dos casos (A1 y A4), al igual que la división entre 8, usada por dos alumnos distintos (A4 y A7).

El dibujo no es un recurso muy utilizado por los alumnos, ya que solo A12 y A19 lo hacen. Suponemos que esto se debe a que al tamaño de los números, que hacen menos viable la realización de la representación pictórica.

Solo cinco alumnos han respondido correctamente. En este caso, el número de fallos y aciertos parece estar más repartido entre los alumnos que han realizado o no un dibujo.

Es destacable que dos alumnos (A10 y A13), comentan que lo han averiguado igual que en la cuestión anterior. Parece que estos alumnos ya se dan cuenta de que existe cierta regularidad entre los casos presentados.

Cuestión 9

Entre los patrones usados destaca la utilización de aquellos que aluden a la relación directa entre variables (5) cuando el objetivo de la cuestión es que usen un patrón basado en la relación inversa.

A6 es un caso particular porque divide el número de niños entre el número de mesas por lo que no lo podemos ubicar ni en la relación directa ni en la inversa. Parece que el alumno no tiene claro como abordar el problema y usa una división entre los datos que tiene como recurso sin ninguna justificación aparente: "Pues dividiendo los niños por las mesas".

Un alumno repite las condiciones ofrecidas en el ejemplo del enunciado inicial (A1). Es curioso que este alumno especifique que en cada mesa pueden sentarse 3 niños, hecho que no se menciona en la explicación de la tarea. Puede deberse a un fallo de concentración, o a un error en la comprensión.

En este caso de la relación inversa, solamente 3 alumnos (A12, A13 y A20) han respondido a la cuestión con un patrón completo que se refiera a esta relación.

Es destacable que solo un alumno (A12) del total (18) ha realizado un dibujo en esta cuestión (figura 5.2), lo cual parece lógico por la dificultad del tipo de dibujo necesario. La representación verbal es usada en todos los casos salvo en uno (A11), que usa la representación numérica sin combinarla con otro tipo.

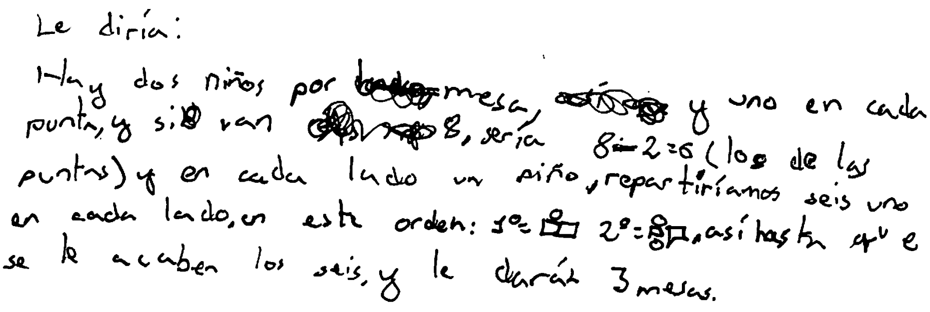

Le diría:
Hay dos niños por mesa, y uno en cada punta, y si van 8, sería 8−2=6 (los de las puntas) y en cada lado un niño, repartiríamos seis uno en cada lado, en este orden: 1º: 2º: así hasta que se le acaben los seis, y le darán 3 mesas.

Figura 5.2. Respuesta a la Cuestión 9 de A12.

Cuestión 10

Entre los alumnos que responden (13), 5 lo hacen de modo general, como era la intención de la cuestión, y 8 lo hacen aludiendo a un caso particular. Es destacable que los 8 alumnos que usan un caso particular, usan el mismo: 3 mesas y 8 niños. Es posible que esto se deba a cierta confusión en el enunciado, que comienza: "En la fiesta los niños están sentados como hemos visto". Los alumnos pueden haber interpretado que nos referíamos a la situación vista con un número concreto de 3 mesas y de 8 niños, y no al modo de organización visto, aplicable a cualquier número de mesas.

La estrategia más frecuente se da dentro de estos casos particulares, y es el uso del patrón incompleto Nx2. Es curioso que ningún alumno dé la respuesta con este patrón para cualquier caso en general. El bajo número de alumnos que responden de forma general, puede ser debido como explicábamos a cierta ambigüedad del enunciado.

También es escaso el número de alumnos que aluden a la relación directa entre mesas y cubiertos (3), en comparación con los que aluden a la relación entre niños y cubiertos (8). Ambas relaciones son lógicas pero parece más fácil para los alumnos la segunda.

En cuanto a las representaciones utilizadas, solo 2 alumnos (A12 y A18) usan un dibujo, y los dos lo hacen sobre un caso particular. Parece que a la hora de generalizar, como es el caso de esta cuestión, los alumnos no son proclives a usar el dibujo. El caso de A8 (figura 5.3) también es significativo, ya que es el único que ha usado la letra *n* fuera de la Cuestión 6 y lo ha hecho de manera correcta (representación algebraica).

Suponemos que el uso de *n* es consecuencia de que ya la ha tratado esta letra en la Cuestión 6 escribiéndola como un símbolo algebraico.

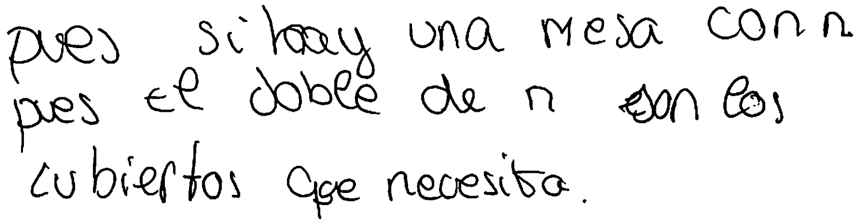


Figura 5.3. Respuesta a la Cuestión 10 de A8.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

En este último capítulo presentamos las conclusiones obtenidas tras la realización del trabajo de investigación.

Con este trabajo hemos querido aportar información útil a un conjunto de estudios que intentan llevar al aula una nueva visión del álgebra en el currículo. De ahí lo innovador de este estudio en el que nos planteamos como objetivo: *analizar los patrones y las representaciones utilizadas por un grupo de 20 estudiantes de 5º de educación primaria que resuelven una tarea compuesta de 10 cuestiones, en la que se les induce a realizar la generalización de un patrón a partir de la información de un ejemplo genérico.*

A continuación presentamos en primer lugar una valoración sobre en qué medida se han conseguido los objetivos propuestos para el estudio, y en segundo lugar las líneas de investigación que quedan abiertas para futuros trabajos.

Consecución de los objetivos

Hemos analizado la producción de un grupo de estudiantes de 5º de primaria, en la tarea mencionada, las cuales fueron analizadas individualmente, con intención de cumplir a los objetivos específicos que se plantearon al principio de la investigación.

En primer lugar nos planteábamos i*dentificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención al uso de patrones, tanto en el trabajo centrado en la relación directa como el relativo a la relación inversa entre las variables*. Podemos decir que hemos conseguido ese objetivo, ya que al analizar los datos de cada una de las cuestiones respondidas, hemos identificado una gran variedad de estrategias que han sido utilizadas por los alumnos, destacando aquellas que hacen uso de patrones distinguiendo entre patrones apropiados y completos, apropiados pero incompletos, e inapropiados.

El uso de patrones estuvo en cierto modo condicionado por las magnitudes con las que los alumnos trabajaban, siendo el uso de dibujos y el conteo los métodos más utilizados cuando el número de niños y mesas era pequeño (generalización cercana), mientras que en las cuestiones en que se trabajó con cifras que los alumnos consideraban demasiado grandes para dibujar (generalización lejana), la tendencia generalizada fue utilizar el cálculo numérico. En el segundo caso, los alumnos generalmente recurrieron al uso de diferentes patrones.

La variedad de patrones completos que podemos considerar válidos para expresar la generalización en las preguntas en que esta se solicitaba ha sido significativa, dándose hasta 3 casos de patrones para cada tipo de relación (directa e inversa). Entre todos, el más usado ha sido Mx2+2 (relación directa), donde M es el número concreto de mesas con que los estudiantes operan en la cuestión específica en la que usen el patrón. Si tenemos en cuenta todos los patrones presentados en las respuestas (completos e incompletos, inapropiados e inapropiados) sumamos más de 20, repartidos de manera uniforme entre ambos tipos de relación. Con ello ratificamos la gran variedad de patrones presentes en las producciones de los alumnos.

Resaltamos el caso de la cuestión 10, de una dificultad algo más avanzada ya que contiene una variable más que las cuestiones restantes. En ella los alumnos debían averiguar el número de cubiertos a partir del número de mesas. Los resultados obtenidos muestran que una gran mayoría solo fue capaz de averiguar el número de cubiertos a partir del número de niños, presentando un patrón incompleto. Esto sugiere que una generalización basada en una relación compuesta puede resultar más dificultosa para estudiantes de esta edad.

También resultó demasiado compleja para la mayoría de los alumnos la cuestión números 6 en la que se introducía el término *n*, ya que solo un alumno produjo una expresión de carácter general, no referida a un caso particular.

Como segundo objetivo específico nos planteábamos *describir las representaciones (verbal, numérica, pictórica, algebraica o tabular) que los alumnos utilizan en las tareas de generalización;* objetivo que también consideramos conseguido. El tipo de representación más usado es el verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen como representaciones múltiples, acompañadas de otras de carácter numérico o pictórico.

Las representaciones de tipo pictórico, han sido más frecuentemente utilizadas en cuestiones que implicaban valores pequeños para el número de mesas o de niños, mientras que las representaciones numéricas fueron más usadas en los casos en que el número de niños o de mesas era demasiado grande como para poder dibujarlo.

Por otro lado, destacamos la presencia de algunas representaciones algebraicas, sobre todo en cuestiones finales, dándose el uso de símbolos como la letra *n*, o interrogantes para expresar alguna cantidad.

El análisis de la representación tabular está basado en la cuestión 4, en la que la mitad de los alumnos a los que les preguntamos responde utilizando una tabla como representación. Consideramos lógico ese resultado, ya que los alumnos no han trabajado la construcción de tablas con anterioridad, aunque sí han observado tablas en las que organizan datos, tanto en matemáticas como en otras áreas. Es digno de reseña el hecho de que en una en la que no se pide específicamente, un alumno utiliza una representación tabular para organizar varios casos particulares de número de mesas y número de alumnos representados mediante la letra *n*.

Limitaciones de la investigación

Reconocemos algunas limitaciones de este trabajo. En primer lugar, el tiempo disponible ha hecho que no profundicemos en determinados aspectos de los que hemos sido conscientes. Ejemplo de esto son los otros tipos de análisis posibles a partir de la información recogida, de los que sólo nos hemos centrado en uno (análisis por cuestiones).

La extensión máxima permitida para la memoria ha hecho que no podamos considerar toda la información disponible.

En esta ocasión contamos con las producciones escritas de los estudiantes. En ocasiones, esto no ha aportado evidencias suficientes. Contar con entrevistas a los sujetos, por ejemplo, podría enriquecer el trabajo.

Líneas de continuación

Son varias las líneas de continuación que este estudio deja abiertas.

Considerando la información recopilada para este trabajo, se podría continuar con los otros dos análisis mencionados en el capítulo sobre análisis y resultados. En el presente trabajo solo hemos realizado un análisis de los tres posibles. Ha quedado pendiente realizar la comparación entre las producciones a diferentes cuestiones. Entre estas comparaciones, consideramos interesante examinar la relación entre las preguntas 1, 2, 3 y 5, que involucran una relación que hemos llamado directa (la variable independiente es el número de mesas), en un orden creciente de dificultad. También se pueden analizar las relaciones entre las cuestiones 7, 8 y 9, con las que se da el mismo caso pero aplicado a la relación inversa, o incluso una análisis que compare las respuestas obtenidas en las cuestiones 5, 9 y 10, que proponen a los alumnos la expresión de un patrón o fórmula general para los diferentes casos que pueden darse partiendo del ejemplo genérico.

Por otro lado, se puede realizar un análisis de la producción de algunos o todos los alumnos de modo individual en la totalidad de la prueba, y así apreciar su constancia en el uso de patrones, su persistencia en el uso de unas u otras representaciones, y la capacidad de generalización que puede atribuírsele en base a la suma de los resultados de las 10 cuestiones.

Además, este trabajo deja abiertas líneas de investigación en las que se trabaje con alumnos más pequeños, con instrumentos de un corte similar al utilizado en el estudio, pero con adaptaciones. Como ya se ha evidenciado en algunos de los trabajos presentados como investigaciones previas, el pensamiento algebraico, la capacidad de expresar generalización, o la identificación de patrones, son procesos relacionados con el pensamiento funcional y que pueden ser trabajadas con alumnos de los primeros cursos de primaria o incluso de educación infantil, y esto puede trabajarse con actividades escritas, mediante entrevistas y con materiales manipulativos.

Por último, también es posible indagar en cuestiones concretas de las trabajadas en este estudio, como en el significado que los estudiantes dan a las tablas en diferentes niveles de educación primaria en el contexto de relaciones funcionales, o las diferentes representaciones pictóricas sobre un mismo concepto o misma relación funcional que estudiantes de diferentes niveles de educación primaria construyen, entre otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ali, O. y Alsayed, N. (2010). The effectiveness of geometric representative approach in developing algebraic thinking of fourth grade students. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 256-263.

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40,* 111-129.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Barbosa, A. (2011). *Patterning problems: sixth graders' ability to generalize*. Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin, Alemania: Springer-Verlag.

Boletín Oficial del Estado (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria* (Vol. BOE Nº 293, pp. 43053-43102). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and functional tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 309-319.

Brizuela, B. M. y Martinez, M. V. (en prensa). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero, & A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo Cognitivo y Educación*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cai, J., Ng, S. F., y Moyer. J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: lessons from China and Singapore. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 25-41). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2011). *Graphical representation and generalization in sequences problems.* Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (en prensa). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de secuencias. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.*

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 87-115.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. V. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P. (Ed.) (2011). *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown.* Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Espinosa, M. E. (2005). Los sistemas de representación en la solución de problemas de algebra elemental. *ALAMMI, 2*,

Fillao, J. y Gutierrez, A. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del 10º grado en Santander (Colombia). En M. Camacho, P. Flores, P. Bolea, P. (Eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 355-368). Tenerife, España: SEIEM.

Freiman, V. y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sing. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415-422). Bergen, Noruega: Bergen University Coleege.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2011). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, Rio Claro, 26*(42B), 483-511.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Universidad de Granada.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2008). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J. K., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

León, O. G. y Montero, I. (1997). *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Lin, F., Yang, K y Chen, C. (2004). The features and relationships of reasoning, proving and understanding proof in number patters. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 227-256.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Lüken, M. M. (2011). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 39-48.

Martínez, M. V., Fernández, F. y Flores, P. (2007). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Trabajo presentado en las Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas, Estadística y Azar, 141-151.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of Algebra*. The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Molina. M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale y J. P Ponte, (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 27–51.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. y Ambrose, R. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equal sign. *Teaching Children Mathematics, 13*(2), 111-117.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning, 1*, 441-465.

Moss, J. y London, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 277-301). Berlin, Alemania: Springer-Verlag.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Nathan, M. J. y Kim, S. (2007). Pattern generalization with graphs and words: a cross-sectional and longitudinal analysis of middle school students' representational fluency. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 193-219.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pappano, L. (2012). The algebra problem. How to elicit algebraic thinking in students before eighth grade. *Harvard Education Letter, 28*(3), 1-3.

Radford, L. (2012a). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Radford, L. (2012b). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. Trabajo a presentar en el 12th International Congress on Mathematical Education, Seúl, Corea.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo fin de máster. Granada: Universidad de Granada

Samsom, D. (2007). Patterns of visualization*. Learning and Teaching Mathematics, 5*, 4-9.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Stylianides, G. J. (2008). Ananalytic framework of reasoning-and-proving. *For the learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Trujillo, P. A. (2008). *Procesos de generalización que realizan futuros maestros*. Trabajo fin de máster. Granada: Universidad de Granada.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(2), 107-118.

Warren, E, y Cooper. T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171-185.

Webgrafía

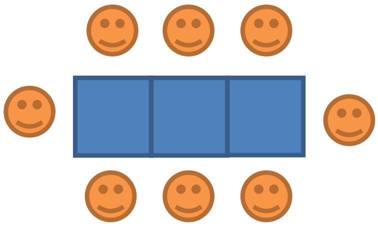
http://www.australiancurriculum.edu.au/.

Anexos

Anexo A

Tarea 1:

En la siguiente imagen podemos ver a un grupo de amigos que se han reunido para merendar. También podemos ver las mesas cuadradas en las que van a sentarse:

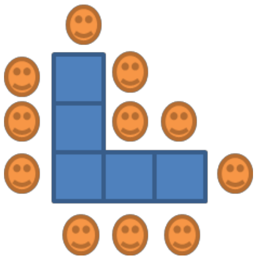


Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado. Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?
2. ¿Cuántos pueden sentarse si juntamos 6?
3. Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse a merendar en ellas?
4. Representa los datos obtenidos hasta ahora sobre el número de mesas y el número de amigos en una tabla.
5. Explica cómo podemos averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas. ¿Cómo sabes que eso es así?
6. Si tenemos un número cualquiera de mesas (n), ¿cómo calcularías el número de amigos que se pueden sentar en ellas? Si tenemos n mesas, entonces se pueden sentar _____ amigos.
7. Representa los datos obtenidos hasta ahora en una tabla.
8. ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 amigos?
9. ¿Y para que merendaran 58?
10. Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar.

Tarea 2:

Otro grupo de amigos se reúne para merendar y juntan las mesas de otra forma (formando una L). Observa como se sientan estos:



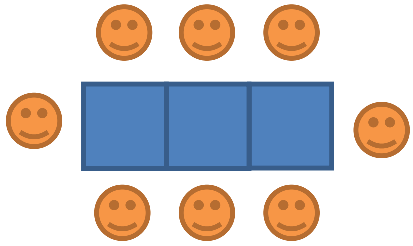
Al igual que en el caso anterior, cada amigo debe ocupar un lado libre de una mesa, sin que ninguno pueda sentarse en una esquina. Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar en 5 mesas si las juntamos en forma de "L"?
2. ¿Cuántos pueden sentarse si tenemos 11 mesas?
3. Y si tuviéramos 141 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse?
4. Explica cómo podemos calcular el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas colocadas en forma de L que hay.
5. Representa los datos obtenidos hasta ahora en una tabla.
6. ¿Cuántas mesas harían falta para que pudieran merendar 15 amigos? ¿Y para que merendaran 57?
7. Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar.

Anexo B

Tarea 1:

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?

2. ¿Cuántos pueden sentarse si juntamos 6?

3. Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse a merendar en ellas?

4. Organiza los datos obtenidos hasta ahora sobre el número de mesas y el número de amigos en una tabla.

5. Explica cómo podemos averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas. ¿Cómo sabes que eso es así? Puedes ayudarte de un dibujo.

6. Si tenemos un número cualquiera de mesas (n), ¿cómo calcularías el número de amigos que se pueden sentar en ellas? Si tenemos n mesas, entonces se pueden sentar _______ amigos.

7. ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 amigos?

8. ¿Y para que merendaran 58?

9. Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de personas que se quieren sentar. Si lo necesitas, puedes hacer un dibujo.

Tarea 2:

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos ojos habrá en la sala si el número de mesas es 5?

2. ¿Y cuántos si tenemos 10 mesas?

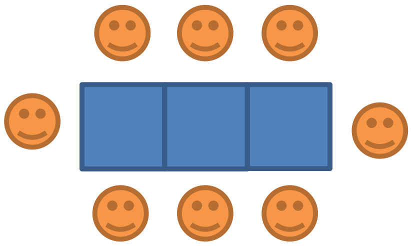
3. Y si tuviéramos 141 mesas ¿cuántos ojos habría?

4. Explica cómo podemos calcular el número de ojos que hay a partir del número de mesas. Puedes ayudarte de un dibujo

5. ¿Cuántas mesas harían falta si el número de ojos en la sala fuera 32? ¿Y si hubiera 68 ojos?

6. Explica cómo podemos averiguar el número de mesas que habrá a partir del número de ojos en la sala. Ayúdate de un dibujo si quieres.

Anexo C



Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?

2. ¿Cuántos pueden sentarse si juntamos 8?

3. Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos en una tabla.

5. ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas? ¿Cómo sabes que es así??

6. Si n es el número de mesas disponibles ¿cómo expresarías el número de amigos que se pueden sentar en ellas?

7. ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 amigos?

8. ¿Y para que merendaran 58 amigos?

9. ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de amigos que se quieren sentar?

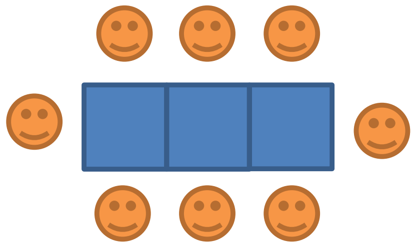
10. Imagina que en una fiesta de cumpleaños hay mesas como las anteriores y los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Explica cómo podemos averiguar el número de cubiertos que se necesitan a partir del número mesas que hay. ¿Cómo sabes que eso es así?

Anexo D

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:____
Curso:________________ Fecha: 13/4/2012
Edad: ______ años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

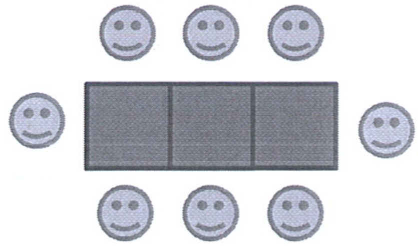
7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Anexo E



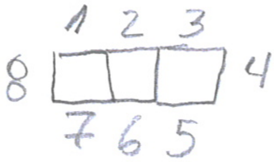
Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

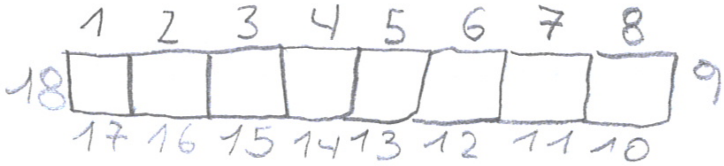
1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?

8 personas.



2. ¿Cuántos pueden sentarse si juntamos 8?

18 personas.



3. Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} {}^{2\,4} \\ 120 \times 2 \\ \hline 260 \end{array}$$

Lad.

R- Los 260 son las personas que se sentarón en los lados y los 2 son de los extremos.

$$\begin{array}{r} 260 \\ +\ \ 2 \\ \hline 262 \end{array} \rightarrow 2\ \text{Ex.}$$

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos en una tabla.

Mesas	amigos
120	262
3	8
8	18

5. ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas? ¿Cómo sabes que es así?

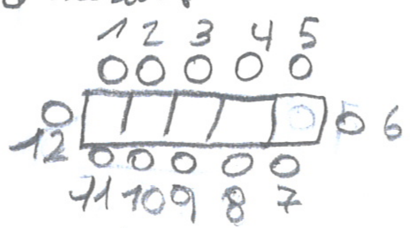
R- Multiplicando las 120 mesas por 2 y el resultado lo sumaba 2. por que le había quito dos, por que eran las 2 extremas de las mesas.

6. Si n es el número de mesas disponibles ¿cómo expresarías el número de amigos que se pueden sentar en ellas?

No entiendo lo que sicnifica n.

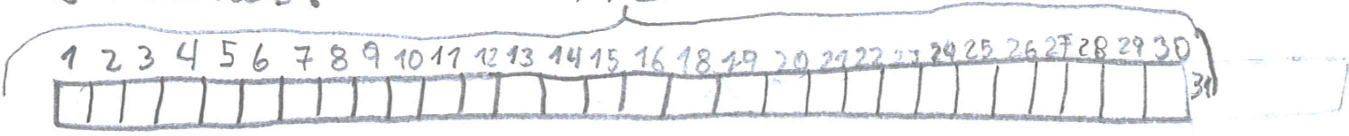
7. ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 amigos?

5 mesas.



8. ¿Y para que merendaran 58 amigos?

29 mesas. X2



9. ¿Cómo explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de amigos que se quieren sentar?

multiplicando por latabla del dos, 10 veces 2 + 10 veces dos + 9 veces 2 = 29 mesas.

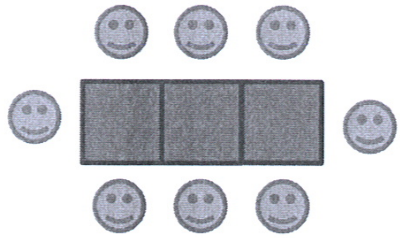
10. Imagina que en una fiesta de cumpleaños hay mesas como las anteriores y los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Explica cómo podemos averiguar el número de cubiertos que se necesitan a partir del número mesas que hay. ¿Cómo sabes que eso es así?

~~8 mesas X~~

$$\begin{array}{r} 8 \times 2 \\ \hline 16 \end{array}$$

R- se necesitan 16 cubiertos mutiplicando las mesas (8) y los multiplicas por 2.

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la imagen. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

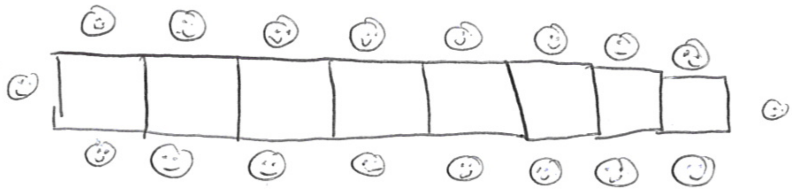
Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si juntamos 3 mesas?

8 amigos.

2. ¿Cuántos amigos pueden sentarse si juntamos 8 mesas?

18 amigos.



3. Y si tuviéramos 120 mesas ¿cuántos amigos podrían sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 2 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 240 \\ + 2 \\ \hline \boxed{242} \end{array}$$

• Lo he averiguado porque en un lado de la mesa hay el número de mesas y como hay dos lados lo he ~~puest~~ multiplicado y despues como hay 2 en cada extremo lo sumo y me en total 242.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos en una tabla.

5. ¿Cómo explicarías a una amiga cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar a partir del número de mesas? ¿Cómo sabes que es así?

• Porque como salía en el dibujo si hay una mesa se pone ~~un~~ amigo en un lado y ~~dos~~ 1 en cada extremo de la mesa.

• Porque me he fijado en el dibujo lo he averiguado.

6. Si *n* es el número de mesas disponibles ¿cómo expresarías el número de amigos que se pueden sentar en ellas?

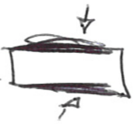
7. ¿Cuántas mesas necesitaríamos para que pudieran merendar 12 amigos?

5 mesas

8. ¿Y cuántas mesas necesitaríamos para que merendaran 58 amigos?

58 |2
18 29 mesas.
0

9. ¿Cómo explicarías a un amigo cómo averiguar el número de mesas que se necesitan a partir del número de amigos que se quieren sentar?

Pues porque es cada lado se sienta uno es decir ~~así~~ aquí  y en ~~un~~ extremo se sienta otro esdecir así  y en total en una mesa se sentarían 4.

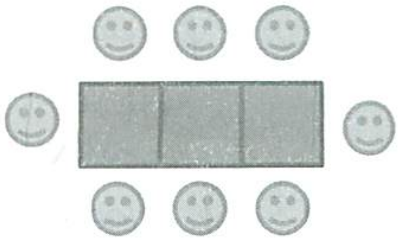
10. En la fiesta de cumpleaños, cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Explica a un amigo cómo podemos averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores) que se necesitan a partir del número mesas que hay. ¿Cómo sabes que eso es así?

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



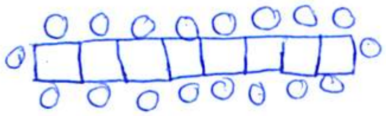
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

se pueden sentar 8 niño. Lo he averiguado porque te lo dice el dibujo.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



se pueden sentar 18 niños. Lo he averiguado haciendo un dibujo y contando los lados en los que se pueden sentar los niños.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 3 \\ \hline 360 \end{array}$$

se pueden sentar 360 ninos.

Lo he averiguado multiplicando 120 que son los mesas de hay y 3 por los niños que se pueden sentar en una mesa.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Mesas	(amigos) número
3 mesas en forma de fila, solo se pueden sentar en los lados, en las esquinas no.	Se pueden sentar 8 niños en 3 mesas

Lo he averiguado, porque todo he tenido que dar datos.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Diciendole que son 3 mesas juntas en forma de fila y que solo se pueden sentar los niños en los lados en las esquinas no.

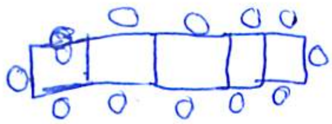
Lo he pensado esto porque es como más o menos viene en el problema, ~~porque~~ así me he enterado, ~~y~~ yo lo explicaría así.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Se pueden senta n niños y hay n mesa.

Al principio no lo he entendido pero Edu melo ha explica y ya me he enterado que en vez de poner un numero hay que poner n.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Se pueden sentar en 5 mesas.

He eiho un dibujo con cuatro mesas pero ~~me~~ ~~le~~ ~~te~~ me faltaba, he puesto otra mesa y si me ha dado justo así lo he averiguado.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

$$\begin{array}{l|l} 58 & 3 \\ \hline 28 & 19 \\ (1) & \end{array}$$

Necesitan 19 mesas y sobra un lado.

Lo he averiguado dividiendo 58 niños y 3 que son los niños que caben en una mesa.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Pues le diría que son 8 niños y que ~~8~~ solo en una mesa caben 3 niños, y ningún niño se puede sentar en ninguna esquina solo en los lados.

Así lo averiguaría yo si me lo dijeran

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Le diria que en tres mesas caben 8 niños y que ~~para~~ cada niño tiene que ~~tener~~ tener 3 cubiertos.

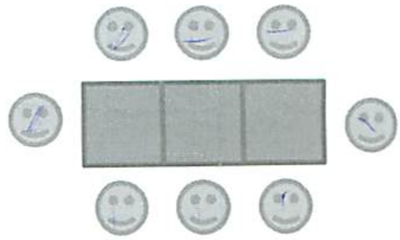
Haciendolo de logica y mirando los dibujo.

A2

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 11 años

Fecha: 13/4/2012



Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

El resultado es 8 niños, para resolverlo he mirado en el dibujo.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

$8 \times 8 = 64$

En 3 mesas juntas caben ocho niños, entonces tenemos que multiplicar las ocho mesas con los ocho niños.

Pueden sentarse 64 niños.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times \quad 3 \\ \hline 360 \end{array}$$

Como en ~~tres~~ una mesa caben 3 niños, multiplicamos 3 por las 120 mesas.

Pueden merendar 360 niños.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

m	A
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

etc...

Y según los invitados que haya multiplicamos tres por el número de invitados.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Pues le diría que, como en cada mesa pueden en 3 niños, lo que tendría que hacer es ver las mesas y en un dibujo, en cada mesa dibujara 3 niños. En este caso he pensado en ~~el~~ el dibujo y en las preguntas anteriores.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

n n n n n n n n

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

lo he averiguado mentalmente fijándome en el dibujo.

Se necesitan 6 mesas.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

No entiendo cómo calcularlo.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Le diría que se fijase en el dibujo, que

- pensara en el número de invitados y que hiciera un dibujo.

- Me he fijado en la pregunta nº 7.

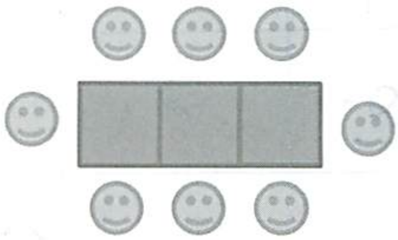
10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Le diría que multiplicase dos (una cuchara y un tenedor) por ocho, los niños que asisten a la fiesta.

A3

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años



Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

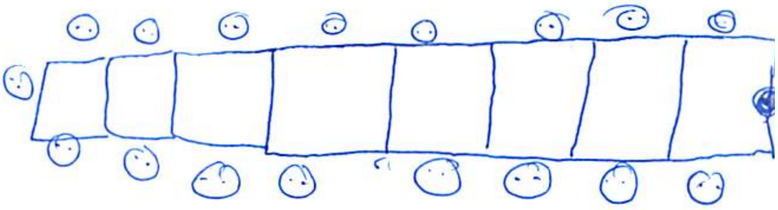
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8 amigos.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



Se pueden sentar 18 amigos, lo he averiguado dibujando las
8 mesas

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

242 niños pues multiplicando $2 \times 120 + 2$.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

	mesas	amigos
1:	3	8
2:	8	18
3:	120	242

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Pues si en cada mesa se pueden sentar 2 porque si los juntas solo hay 2 no 4, pues que multiplique 2x? el numero que sea de mesas, y después le sumas 2 porque en los extremos hay uno en cada uno.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No lo entiendo porque no se lo que significa lo de la letra n

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

5 mesas, porque 5 mesas es = a 10 amigos más los amigos de los extremos

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

28 mesas, lo he averiguado dividiendo 58 : 2 y despues − 1 porque los de los extremos hacen la mesa 29.

Operación

58 | 2
18   29
0

29 − 1 = 28

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Pues divides 2 :? el numero de niños

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Pues multipliando 2 x 8 = 16 porque
cucharas y tenedores son 2 no 1.

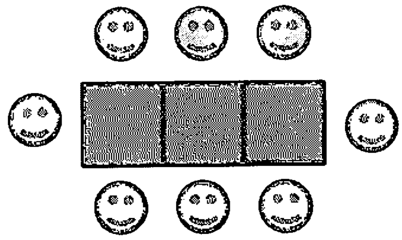
A4

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5ºB
Edad: 11 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

8 amigos se pueden sentar, en 3 mesas.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

8x8= 64 niños se pueden sentar en 8 mesas
lo he averiguado porque si en tres se pueden 8, en 8 mesas habra que multiplicar por 8. Para averiguarlo

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

120 x 8 = 960

~~120 x 64 = 480 + 720 = 7680~~

120
x 3
960 amigos se pueden sentar a merendar
lo he sabido, porque he hecho lo mismo de antes.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

~~ha~~ Dividiendo.

Porque hay que repartirlo entre los niños, que van a merendar y las mesas.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Hay 3 n y hay 8 ~~[illegible]~~ n.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

~~12 x 3 = 36 mesas~~

12 : 3 = 4 mesas se necesitan.

lo he averiguado, porque he pensado, que deve repartir = ~~10~~.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

~~58 x 4 = 232 amigos.~~

$$\begin{array}{r} \overset{3}{5}8 \\ \times\ 4 \\ \hline 232 \end{array}$$

58 : 3 = ~~14~~ 19

58 | 8
2 7
-2-

Porque, como hay 3 mesas lo he repartido.

58 | 3
28 19
-1-

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Sumando todas las mesas.

~~Porque Es lo que~~

lo he pensado. Porque. Para saber cuantas hay devo sumar.

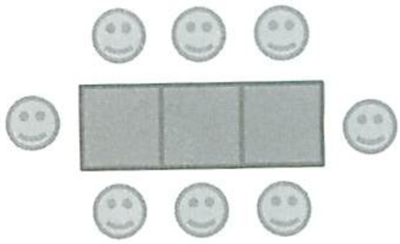
10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

A5

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5-B
Edad: 10 años
Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



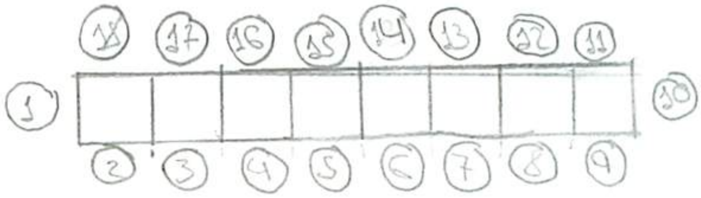
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Pueden sentarse a merendar 8 amigos

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



Pueden sentarse 18 y lo he ~~ab~~ averiguado multiplicando los lados y sumandole 2 de los estremos.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

~~8 · 120 = 960~~

~~120 · 6~~

120 : 3 = 40

40 · 8 = 320

~~Pueden sentarse 960 amigo y lo he averiguado poniendo Sara 9~~

Solución: Pueden sentarse 320 niños porque 120 : 3 para ponerlo como el primera pregunta y por ocho por las personas de la primera pregunta

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

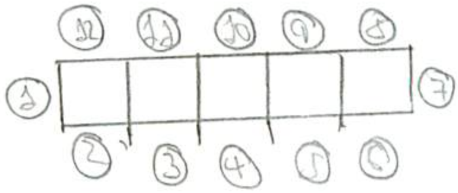
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Solución = Como 5 mesas, haces que multiplique 5·2 es 5 y 5 lado y después sumarle los dos estremos y serían 12 amigos.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Solución = Son n mesas, multiplicas los lados y los dos estremos lo sumas. Al sumarlo todo ~~At~~ ~~toda~~ te va a dar n amigos

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Solución= Son 5 mesas y lo se porque he hecho en la actividad anterior (5)

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

~~58:4~~ 58.2=29

Solución=He puesto 29·2=58·2=116 son los niños que se sientan

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Si tienes 8 mesas lo multiplicas por dos mas los dos estremos. ~~[illegible]~~ son 18

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

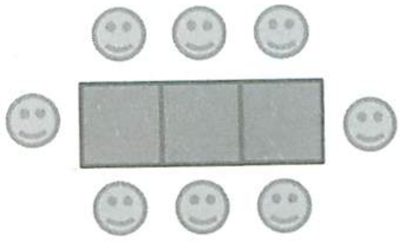
A6

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



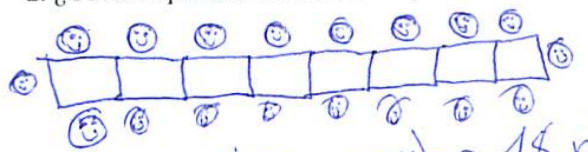
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Pueden sentarse 8 niños.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



Se pueden sentar 18 niños. He dibujado 8 cuadrados, como si fueran mesas y en cada mesa he puesto a dos niños, cada uno en frente del otro.

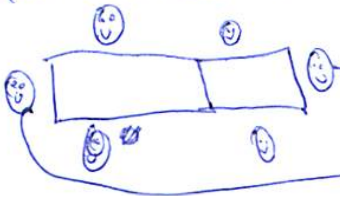
3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$120 : 2 = 60 \quad (\text{resto } 0)$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ +\ 2 \\ \hline 62 \end{array}$$

Se pueden sentar 62 niños.

Lo he averiguado dividiendo 120 (que son las mesas) entre 2 (dos niños que van en cada mesa) me sale 60 y le he sumado 2 más por ~~esto~~ los dos niños que hay en los extremos.



4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

3 mesas = 8 niños

8 mesas = 18 niños

120 mesas = 62 niños.

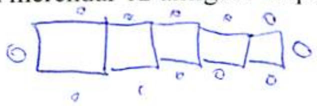
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Es dividiendo las mesas que hay por 2 niños que son los que se sientan en una mesa.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No lo entiendo porque no se a cuantas mesas y amigos se refieren.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Se necesitan 10 mesas.

Como en cada mesa se sientan 2 persona, menos la primera mesa y la última lo que he hecho a sido quitar las personas de los dos extremos y poniendolos en otra mesa hasta que solo haya 10 niños sentados y le añados dos niños a los extremos.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

58 |2
18 29
0

Se necesitan 29 mesas. Dividiendo 58 (son los amigos) y 2 (los niños que son los niños que se sientan en cada mesa)

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Pues dividiendo los niños por las mesas.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

~~Multiplico lo~~ Divido ~~los~~ ~~todos~~ todos los niños por todos los cubiertos.

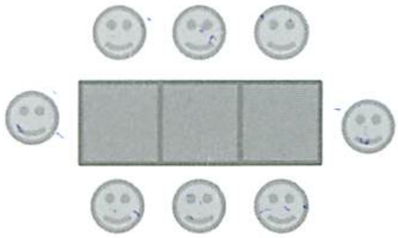
A7

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre
Curso: 5 - B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

8

Solución: 8 amigo pueden sentarse. lo averiguado mirandolo en el dibujo

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

$8 \times 8 = 64$

Solución: Pueden 64 niños sentarse 8 mesas.
Lo he averiguado multiplicando.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

~~120 | 64~~

$$\begin{array}{r} 120 \\ +\ 64 \\ \hline 184 \end{array}$$ amigos

Lo he salido sumando.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

N	M
8	3
10	4
18	6
20	10

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Sumando le los niños.

lo he pesado y lo he puesto

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

n m

Porqoe es lo que me parece ami

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

4 mesas

Como lo he hecho: Viendo las mesas que hay con 8 niños y clas pues suno y más

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

$$\begin{array}{r|l} 58 & 8 \\ \hline 2 & 8 \end{array}$$

Como lo he hecho: Dividiendo

S: 8 mesas

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

S: ~~[illegible]~~ Diciendo lo que hecho

¿Como lo se?: Pues mirando como la puedo hacer

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

~~50 culivto~~

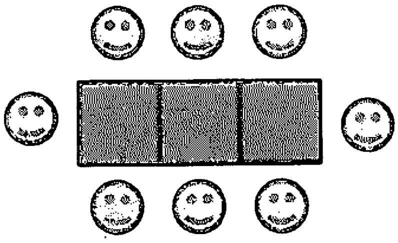
8 x 2 = 16 culiorto

lo he echo: 8 niños y multiplicando por dos: cucharas tenedor

A8

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5B
Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años



Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

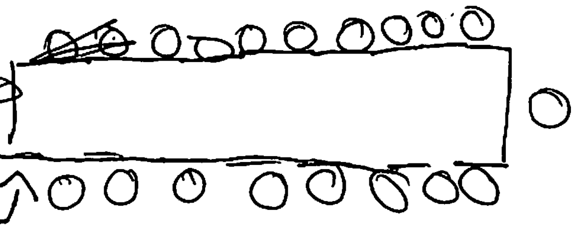
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se sientan 8 amigos, lo he averiguado por ee dibujo de arriba

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Hay 18 niños lo he averiguado haciendo este dibujo



3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 2 \\ \hline 240 \\ +\ 2 \\ \hline 242 \end{array}$$

He muetiplicado 120 x 2 porque hay 120 niños por cada eado y +2 por qce hay 2 lados mas por ee final y ee principio.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

1	2+2=4
2	6
3	8
4	10
~~6~~ 5	12
6	

seria ee doble de cada mesa mas 2 por los niños que hay a los lados

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

~~del mismo modo~~. en vez de multiplicar, hay que dividir.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Si hay n mesas y se pueden sentar 12 amigos

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se nesecitan 5, porque 5 por un lado y 5 por otro + 2 de los anchos = 12

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

58 |2
18 29
 f2

se necesitan 29 mesas porque Si repartes 58 entre los dos cada de la mesa te sale [illegible]

9. Si sabes el número de amigos que van merendar. ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Pues multiplicando el ~~[illegible]~~ de mesas por 2 y sumandole 2

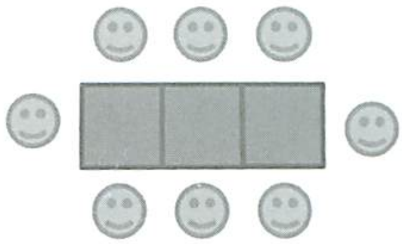
10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

pues si hay una mesa con n
pues el doble de n son los
cubiertos que necesita.

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B   Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



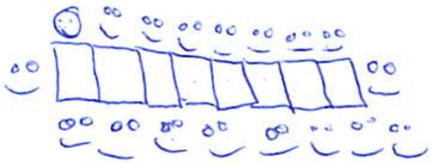
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8 amigos porque se sientan 1 a cada extremo y 3 niños a los lados.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



Se pueden senta un iño a cada extremo y 8 niños a los lados

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

Se puedan sentan 242 ~~142~~ niño 1 a cada extremo y ~~240~~ ~~242~~ 120 niños a cada lado

$$\begin{array}{r} 120 \\ +\,120 \\ \hline 342 \end{array}$$

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

No entiendo ~~camo~~ como hay que organicarlo

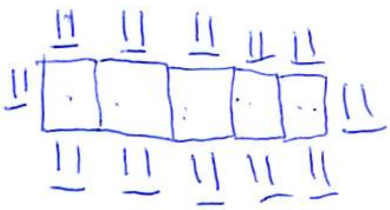
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Si~~a~~ hay 4 misas se ~~se~~ sentarian 10 amigo porque seria el numero de mesas es igual que el numero de lados y en cada extremo hay 2 niños.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

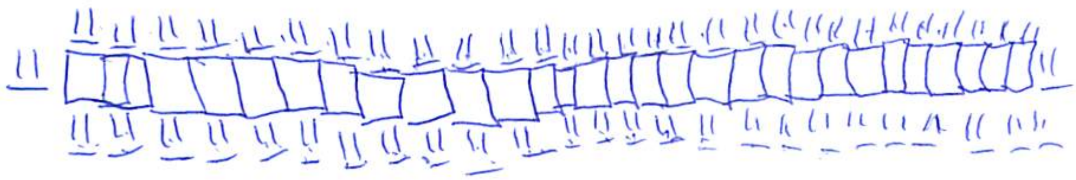
No entiando lo de la letra n muy bien.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Se necesitan 5 mesas. lo he averiguado. dividiendo

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



no lo hentiend ~~porque~~

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

lo explicari asi:

Por ejemplo. Si van 4 personas serian

1 por extremo y uno por lado.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

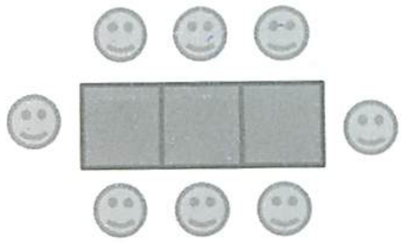
¡No lo entiendo.

A10

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5ºB
Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

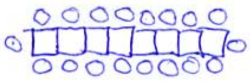
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Pueden sentarse 8 niños/as.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Se pueden sentar 18 niños/as.
Y lo he adivinado con el dibujo.



3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

Se pueden sentar 242 niños lo he averiguado por que he multtipicado las 120 mesas x2 y luego le he añadido 2 por que son los niños de los lados de la derecha e irquierda.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

~~No sé~~

	Mesa	Amigos/as
	1	2
	2	4
	3	6
	4	8

Aunque depende si es a los lados se le suma 1.

Y así todo multiplicado por 2,

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Pues le diría que multipicare el número de mesas por dos y si es a los extremos que le sume 1.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

mesas $\times$ n = n+n

mesa nn= n+n+n+n

Y así sucesivamente.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 5 mesas. Porque si en cada mesa se pueden sentar dos $5 \times 2 = 10$ más los extremos que son $1 + 1 + 10 = 12$

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 28. Y lo he aberiguado igual.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Le diría que dividiese el númera entre 2 y luego le sumaría 2.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

le diría que el número de mesas que hay lo multtipicase x4 por que si la multtipicas x2 sabes cuantos niños hay y si lo haces otra vez sabes cuantos cubiertos tienen en total ~~Ya~~

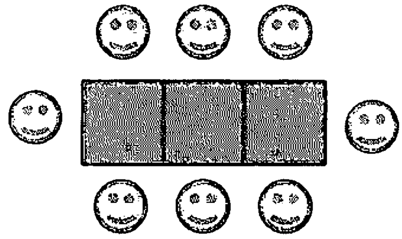
A11

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

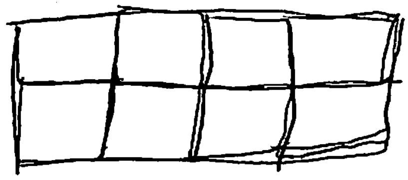
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Pueden sentarse solo 8 niños

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Pueden sentarse 12 niños



Porque 8 mesas. Pues contando cual de ellos se puede sentar en cada mesa.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 3 \\ \hline 360 \end{array}$$

Pues haciendo $120 \times 3 = 360$

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

$8 \times 3 = 24$ 24 niños se pueden sentar.

Pues multiplicando $8 \times 3 = 24$ y así

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 8 \\ \hline 24 \end{array}$$

Pueden sentarse 24 niños

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

$n = 8 \times 3 = 24$ Se pueden sentar 24 niños

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 8 mesas.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 3 \\ \hline 174 \end{array}$$

Se pueden sentar 174 niños

Pues multiplicando 58 x 3 = 174 así.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times 3 \\ \hline 174 \end{array}$$

Se pueden sentar 134 niños

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

No lo Entiendo.

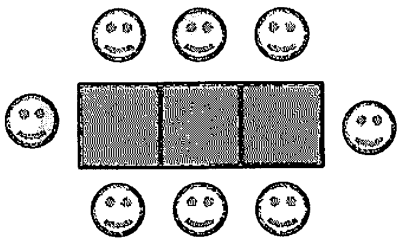
A12

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



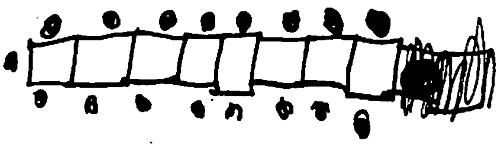
Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8 amigos.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



Se pueden sentar 18 niños ~~porque~~ y lo he averiguado con el dibujo que he hecho

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$120 \times 2 + 2 = 240 + 2 = 242$.

Se podrían sentar 242 niños y lo he averiguado multiplicando 120·2 porque en cada mesa se sientan 2 niños/uno en cada lado y +2 por los niños de las dos ~~puntas~~ puntas

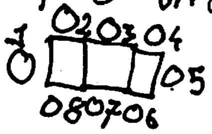
4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Mesas	Amigos
1	4
2	6
3	8
4	10

+1 = +2

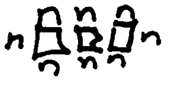
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Le haría un dibujo como este:  y le diría:

- En las ~~puntas~~ esquinas no se sienta ~~nadie~~, solo una persona por lado, y le completaría el dibujo: 

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

nnnnnnnn: hay 8 personas, o también sirve este dibujo:

 =8 personas

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

5 mesas. ~~Porq~~ Lo he averiguado fijándome en la respuesta del ejercicio 4. Me quedé en 4 mesas y 10 amigos, y como por cada mesa que incluyo son 2 amigos más, serían 5 mesas = 12 amigos.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

$58 : 2 - 2 = 26 - 2 = 24$

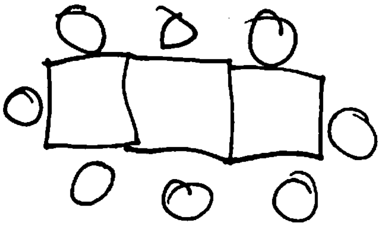
24 mesas. Porque en cada mesa entran 2 niños (uno por lado), por eso :2, y -2 por los 2 niños de las puntas

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

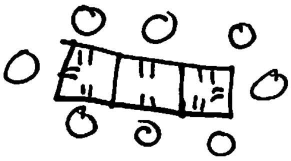
Le diría:

Hay dos niños por ~~lado~~ mesa, y uno en cada punta, y si van 8, sería $8 - 2 = 6$ (los de las puntas) y en cada lado un niño, repartiríamos seis uno en cada lado, en este orden: 1º: 2º: , así hasta que se le acaben los seis, y le darán 3 mesas.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.



Dos cubiertos por niño, así que:



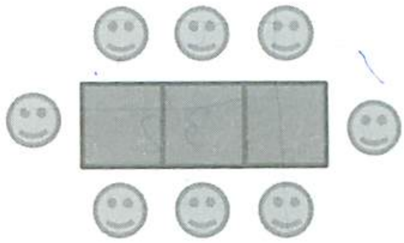
Y si los contamos, da 16.

A13

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º O
Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8 personas.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

16+2=18

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 2 \\ \hline 16 \end{array}$$

Se pueden sentar 18 personas.
Por que si en cada mesa caben dos lo he multiplicado y las dos esquinas la he sumado.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

240+2=242.

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 2 \\ \hline 240 \end{array}$$

Se pueden sentar 242 personas.
Lo mismo que la pregunta anterior.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Mesas	Amigos
5	10
450	900
32	64
12	24
41	82

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

De la misma manera que la pregunta dos porque es lo mismo pero con distintos numeros.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Mesas	Amigos
n n n n n n n	n n n n n n n n n n n n n n
n n n n	n n n n n n n n
n n n n n n n n n	n n n n n n n n n n n n n n n n n n
n n n n	n n n n n n n n

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

6 - 2 = 4

Se necesitan 4 mesas.

Por que lo divides entre dos y te da la mita que siempre hay la mitad de mesas que de amigos.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

29 - 2 = 27

$$\begin{array}{r|l} 58 & 2 \\ \hline 18 & 29 \\ 00 & \end{array}$$

Se necesitan 27 mesas.

De la misma manera de la pregunta anterior.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Pues sabiendo que va ha haber menos mesas que amigos que es lamitad, tendrías que dividir los amigos por las mesas que hay teniendo en cuenta los amigos de los extremos.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

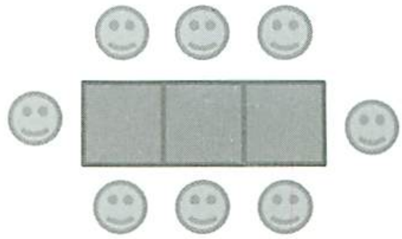
Yolo se ~~po~~ por que con lo ~~de~~ de la cuchara y el tenedor me lio yo lo sabria con el numero de niños.

A14

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre: [redacted]
Curso: 5ºB
Fecha: 13/4/2012
Edad: 11 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8 niños

lo he aberiguado observando el dibujo de arriba

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

se pueden sentar 18 niños.

lo he averiguado dibujando en mi mente

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

Se pueden sentar 240 niños

lo he averiguado multiplicando 120×2

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

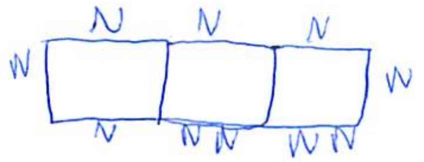
1
2
3
4
5
6

No lo entiendo porque, no me acuerdo de la tabla.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

hay 3 mesas. y se lo explicaría pues, un niño enfrente de otros y dos a las extremos. Pues lo he averiguado mirando el dibujo

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.



lo he oberiguado, porque si lo mesas son anchas se pueden sentar mas gente

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesita cuatro mesas un poco más ancha

lo he averiguado mirando el dibujo

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

porque es el cumple años de Sofía.

lo he averiguado leyendo el problema

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Se necesita 3 mesas

lo he pensado mirando el dibujo de las mesas

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

pues si tengo tres mesas con 8 niños. En la mesa abrá

~~20~~ tenedores.
26

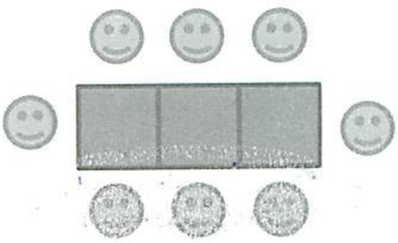
Lo he averiguado multiplicando 8 × 3 porque 8 los niños que hay × 2 que son los cucharas, tenedores.

A15

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre: [redacted]
Curso: 5ºB Fecha: 13/4/2012
Edad: 10 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

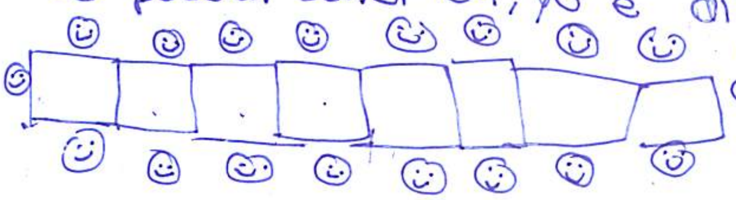
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden senta 8 niños si son 3 mesas.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Se pueden sentar 64, yo e dibujado 8 mesas e puesto caras en cada sitio donde se pueda y los e contado.



3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

No lo se, porque antes puse que no sabía cuántos se sientan

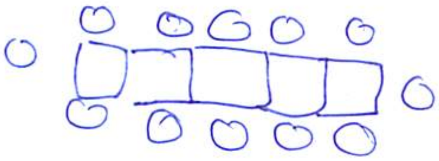
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

No se cuantos van.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No se cuantos van.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado. Se necesitan 5 lo e aberiguado puniendo 12 niños y después he puesto las mesas.



8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado. Se necesitan 29, porqeve, como en una mesa se sientan 2 pues se divide 58 por 2.

58 : 2 = 29

$$\begin{array}{r|l} 58 & 2 \\ \hline 18 & 29 \\ 0 & \end{array}$$

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

No lo entiendo, porque no se cuántos niño van a merendar.

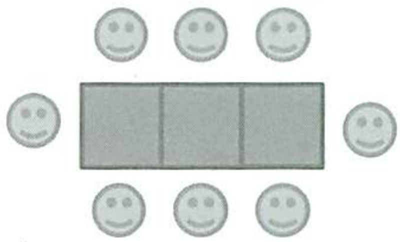
10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

A16

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5.ºB
Edad: 10 años
Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

8, porque si cuentas por todos los lados que se pueden sentar, es ese número de niños aunque aya 3 mesas

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

18, porque cuentas por los extremos y los dos lados.

$8 \times 2 = 16 \quad 16 + 2 = 18$

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$120 \times 2 = 240 \quad 240 + 2 = 242$

242, porque cuentas por los 2 lados (multiplicando x2) y sumando los 2 extremos.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

4, porque se pueden contar todos los lados.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Se lo explicaría así:
contando por cada mesa dos personas, menos por los extremos que pueden haber 3. Eso ya depende de las mesas que aya.
Lo he pensado imaginándomelo.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No lo entiendo porque nosé como utilizar la letra n. (como utilizarla).

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

5, porque por los 2 lados ya hacen 10 y los extremos 2. (10+2=12).

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

28.
Lo he averiguado dividiendo 58 entre dos que me daría la parte más larga de los 2 lados y despues sumarle 2 de las partes más pequeños.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Se lo explicaría así:
Por el número de personas que hay lo divides entre dos.
Lo que te ~~de~~ de se lo sumas a dos (por los lados en que acaban las mesas).

Lo he pensado imaginándomelo, como si fuera de verdad

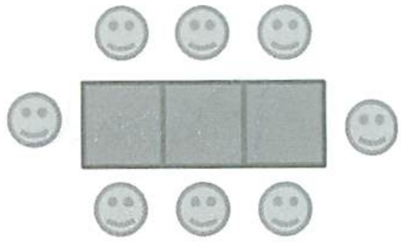
10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Por cada mesa 2x2 por dos personas y dos cubiertos.
En el casodo de los dos ~~últimos~~ últimas de los estremos sería 3 personas y 2 cubiertos cada uno (3x2).
Como en los anteriores, imaginándomelo.

A17

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años
Fecha: 13/4/2012



Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Se pueden sentar 8, por que, si, en cada lado ba 1 y son 3 mesas 3+3=6+2 de cada ~~lado~~ extremo

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

8+8=16+2=18
Son 18 niños
8 en cada lado que serian 16+2 de cada extremo.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

(120×2)+2=240+2=242

Son 242 niños

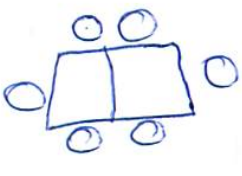
120 en cada lado +2 de cada extremo.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Depende de como de largo sea la tabla

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

~~Pues si en cada mesa se puede~~



Por ejemplo si en dos mesas hay 6 lados
cada niñ@ se sienta en un extremo
habrian 6 niñ@s

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No lo entiendo.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

se necesitarian 5 mesas
ya que 5+5=10 y los ~~2~~ extremos que quedan
es = a 12

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

58-2=56

Son 56 mesas 58-2 de los extremos
que quedan 56, si pones 56 +2 de
los extremos dan los 58 amigos que
hay

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

si el numero de niños le quitas 2 dan
el numero de mesas que necesitas,
por que dos ya ban en cada
extremo.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

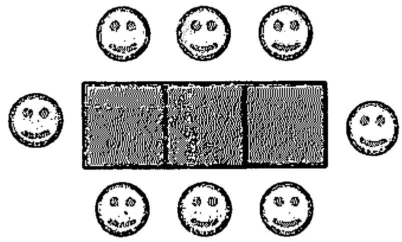
Cuando sabes el numero de mesas calculas
el de niños que son el doble de lado mas 2
de cada extremo, y cuando sabes el numero
de amigos lo multiplicas por 2. que son
en numero de cubiertos

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5ºB
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

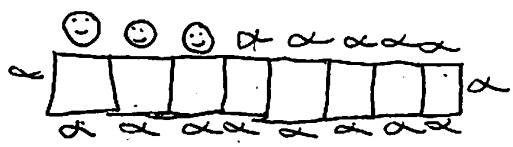
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

8

Se pueden sentar (~~8~~) amigos.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.



18 amigos. Lo he averiguando dibujando las 8 mesas y poniendo los amigos en los sitios.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

Me resulta difícil pensarlo.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Datos

3 mesas

7 amigos

3(~~en un lado~~ ~~de~~) arriba

3 abajo

1 al lado derecho

y otro al izquierdo

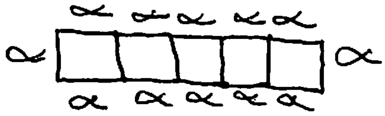
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Le diría: "Tienes que poner los amigos dónde corresponda, no pueden estar sentados en las esquinas, ni tampoco ponerlos en los lados que están pegados a otras mesas".

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

No entiendo cómo poner la letra n.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



He pensado, que a los lados tiene que haber un amigo, ya me sobrarían dos, me quedan diez, he pensado en el 5 y le he sumado otro 5, me sale 10, luego, le he sumado los dos niños que le quité y ya está.

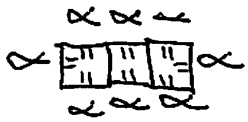
8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

No me sale ninguna cuenta.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Si son ocho amigos, los repartes una mesa uno arriba, el otro al lado, otra mesa uno arriba y abajo y otra abajo, lo mismo con el tercero, arriba, abajo y al lado.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.



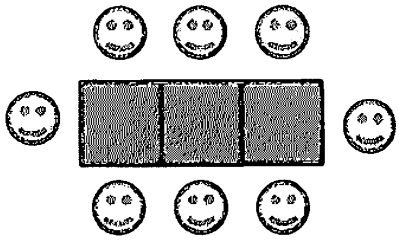
8. Le pones dos cubiertos a cada uno de los niños después los cuentas dos a dos.

A19

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Fecha: 13/4/2012
Edad: 11 años

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

Pueden juntarse porque te lo pone el dibujo.

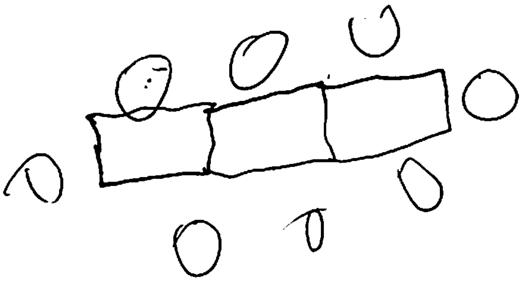
2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

8x4=32 Pueden sentarse 32 amigos porque en una mesa caben 4 amigos y te pregunta 8 mesas entonces he hecho 8x4.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

120x4=480. Pueden sentarse 480 amigos en 120 mesas porque en una mesa caben 4 amigos y entonces he hecho 120x4.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.



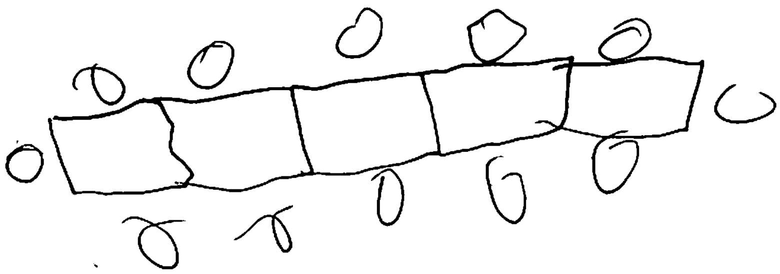
5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

Pues diciendole que solo se pueden sentar a los lados de la mesa y no en las esquinas.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

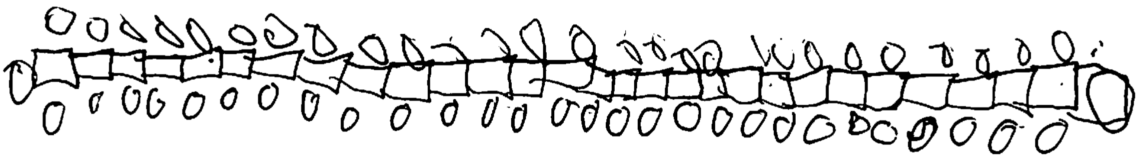
No entiendo lo de la letra n.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Lo he averiguado haciendo un dibujo.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.



Se tienen que poner 28 mesas y lo he averiguado haciendo un dibujo.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

No lo entiendo.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

No lo entiendo.

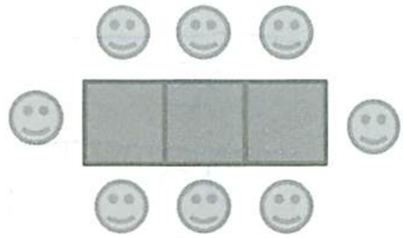
A20

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre:
Curso: 5º B
Edad: 10 años

Fecha: 13/4/2012

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

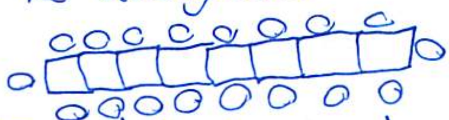
Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

8amigos, ya que en la imagen se ve claramente.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Se pueden sentar 18 niños. Lo he averiguado por el dibujo que he hecho



o multiplicando 8x2 para los niños del largo de la mesa +2 de cada extremo.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

$(120 \times 2) + 2 = 240 + 2 = 242$

Se pueden sentar 242niños. He multiplicado 120x2 para saber cuantos niños hay en el largo de la mesa +2 de los extremos.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

Mesas	Amigos
3	8
5	12
10	22
14	30

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

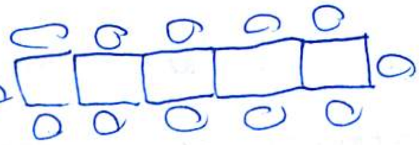
Se lo explicaría diciéndole:
si hay 3 mesas y en en largo horizontal, es decir... (aquí le enseñaría la posición) caben ~~1~~ 3 niños, 1 niño por mesa, hay que contar el doble ya que ~~est~~ hay dos lados y serían 6. Más 2 niños que hay en los extremos 1 de un lado y otro del otro son 8.

6. Vamos a utilizar la letra *n* para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra *n* el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

Hay 3 n, y por cada n hay 1 niño sentado en su lateral. Como la n tiene 4 laterales y solo vamos a utilizar dos de ellos. Hay sentados 2 niños por n, y las n de los extremos 3 niños. Entonces hay 8 niños por las 3 n.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Necesitan 5 mesas. lo he averiguando pensando si en 3 mesas son 6 niños sin los de los extremos el o que se acerca más a doce es $5 \times 2 = 10 + 2$ de los extremos 12.



8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Necesitan 28 mesas. Porque he ~~dividido~~ restado 2niños de los extremos 56 y lo he dividido entre 2 = 56:2= =28.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Le diría, si hay ? números de niños le quitamos 2 de los extremos ya que esos no necesitan mesas y ese número de niños lo ~~[illegible]~~ repartes entre 2 lados.

10. En la fiesta los niños están sentados como hemos visto. Cada niño necesita una cuchara y un tenedor para comer. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de cubiertos (cucharas y tenedores, juntos) que se necesitan? Explica cómo lo has pensado.

Le digo, si tenemos 3 mesas vendrán 8 niños y cada niño necesita 1 cuchara son 8 niños, 8 cucharas + 8 tenedores = 16 ~~cuchas~~ cucharas y tenedores juntos: 8 cucharas y 8 tenedores.